

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 2 maggio 1909.*

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica vegetale. — *Sintesi della salicina per mezzo delle piante.* Nota del Socio G. CIAMICIAN e di C. RAVENNA.

In una Memoria pubblicata lo scorso anno negli Atti della Accademia di Bologna e riprodotta nella Gazzetta chimica italiana <sup>(1)</sup>, abbiamo descritto una serie di esperienze relative al contegno di alcune sostanze organiche nelle piante allo scopo di chiarire qualche punto riguardante la formazione ed il significato biologico dei glucosidi.

Noi abbiamo osservato, sperimentando sui fagioli e sul mais, che introducendo nelle piante sia per mezzo delle radici, che per inoculazione alcune sostanze organiche ossidilate quali la saligenina, l'alcool benzilico e la vanillina, queste vengono preponderantemente distrutte per ossidazione, ma la parte che permane, non si ritrova tutta allo stato libero. Eliminando dall'estratto acquoso delle piante esaminate tutto il prodotto libero con etere, se ne può ottenere dell'altro dopo avervi fatto agire l'emulsina. Inoltre sperimentando con alcuni glucosidi, come l'amigdalina, la salicina e l'arbutina, abbiamo trovato che anche questi subiscono nelle piante un processo di ossidazione per cui vengono prevalentemente eliminati, ma la parte che

<sup>(1)</sup> Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie 6<sup>a</sup>, tomo 5, pag. 29 (1907-8) e Gazzetta chimica italiana, anno 38, parte 1<sup>a</sup>, pag. 682 (1908).

persiste viene a sua volta parzialmente idrolizzata tanto che si ritrova nelle piante libero il composto contenuto nel glucoside.

Sembrava dunque risultare da queste esperienze, che le piante fossero in grado di trasformare in glucosidi le sostanze aromatiche sperimentate, ma che tale processo fosse di natura invertibile, conducendo ad una specie di equilibrio chimico.

Per accertare ulteriormente questi fatti e queste supposizioni, abbiamo fatto nella scorsa estate delle altre esperienze che li hanno completamente confermati.

Anzitutto abbiamo inoculato in un certo numero di piante di mais, ben cresciute e possibilmente uguali, contemporaneamente in alcune la salicina ed in altre la saligenina. A vegetazione compiuta abbiamo riscontrato che il rapporto fra la saligenina libera e quella combinata nelle stesse piante era in entrambi i casi il medesimo e che però è lo stesso, pel risultato finale, introdurre nel mais la salicina o la saligenina. Le quantità della saligenina combinata e di quella libera stanno nel rapporto di circa 1 : 2.

Questi risultati portarono ad ammettere che il mais, come le altre piante da noi sperimentate (fagioli e giacinti), trasformassero parte della saligenina introdotta in salicina e che questo processo fosse realmente dato da una reazione invertibile conducente ad un equilibrio chimico.

Ma il lato più importante del problema non era ancora sufficientemente accertato, cioè che il supposto glucoside che l'emulsina scinde fosse realmente la salicina. Occorrevano esperienze fatte su larga scala che permettessero di isolare il glucoside.

Queste prove furono del pari iniziate nella scorsa estate e la ulteriore trattazione del prodotto venne fatta durante l'inverno. Noi inoculammo 140 piante di mais di cui ne sopravvissero 107, che rappresentavano 98 kg. di materiale nel quale erano stati inoculati circa 200 gr. di saligenina.

Noi non avremmo potuto condurre a buon fine tale lavoro senza il gentile ed efficacissimo aiuto del dott. Emilio Soncini e la grande liberalità e cortesia della casa G. Campari di Milano. All'uno e all'altra noi esprimiamo la nostra più sentita riconoscenza.

Il dott. Soncini curò con grande amore e pazienza la preparazione dell'estratto acquoso delle piante inviategli e l'assai lungo e laborioso trattamento con etere del medesimo. Noi abbiamo avuto a nostra disposizione l'estratto eterico secco e quello acquoso completamente esaurito con etere e convenientemente concentrato.

Il primo venne ripreso con acqua, neutralizzato con carbonato sodico e su di una parte aliquota di esso dosammo la quantità di saligenina, che era contenuta nelle piante allo stato libero. Se ne ebbero in tutto 30 gr. Dopo aver eliminato la saligenina, ottenemmo dal liquido acquoso, acidificato con acido solforico ed estraendo con etere, l'acido salilico che venne purificato



dal benzolo (p. f. 155°). La formazione di questo acido conforta la supposizione che la saligenina introdotta nel mais (come in genere tutte le sostanze fin qui sperimentate nelle piante) si elimini in seguito ad un processo di ossidazione determinato da fermenti.

Il problema più difficile da risolversi era, come si disse, quello di isolare il supposto glucoside che doveva essere contenuto nell'estratto acquoso. Anzi tutto venne fatto per mezzo dell'emulsina e successivo trattamento con etere un dosaggio della saligenina combinata che era presente nell'estratto. Le prove fatte su di una piccola parte aliquota del tutto dettero per risultato che l'estratto conteneva 14 gr. di saligenina combinata. Se si confronta questa cifra con quella suindicata per la saligenina libera, si vede che il rapporto è qui pure di circa 1:2.

Per isolare il supposto glucoside, tutto l'estratto acquoso venne defecato con acetato basico di piombo, che non precipita la sostanza ricercata, e poi concentrato nel vuoto. Si ebbe uno sciroppo colorato in bruno che però non accennava a cristallizzare. Falliti i tentativi di ottenere da questo il glucoside per estrazione con alcool, tentammo di eliminare lo zucchero, presente nell'estratto, per fermentazione col lievito di birra <sup>(1)</sup>. Il tentativo riuscì nel senso che lo zucchero fermenta senza che il glucoside ne sia sensibilmente intaccato. Anche la salicina, come ce lo dimostrò un'apposita esperienza, resiste in gran parte all'azione del lievito. Concentrando nuovamente nel vuoto il liquido liberato dal glucosio, si ebbe sempre uno sciroppo dal quale, nè per estrazione con alcool, nè con etere acetico si riuscì ad ottenere il composto cercato. L'alcool estrasse bensì notevoli quantità di materia cristallina, ma essa era formata prevalentemente da acetato potassico. A questo punto abbiamo pensato di ricorrere ad un processo di dialisi quale è praticato nella elaborazione dei melassi. Sebbene una parte del glucoside diffonda assieme coi sali e ad altre materie gommose e coloranti, pure con questo processo il liquido che resta nel dializzatore viene modificato nella sua composizione in modo così favorevole, che ritentando ora, nel prodotto portato a secco nel vuoto, l'estrazione con etere acetico, abbiamo avuto finalmente l'esito desiderato. A ritentare l'estrazione con questo solvente fummo incoraggiati anche dall'autorevole consiglio dell'illustre prof. Emilio Fischer a cui esprimiamo i nostri ringraziamenti.

Dagli estratti coll'etere acetico si depose per raffreddamento una materia cristallizzata in mammelloncini, che fondevano subito a 185° e davano la colorazione rossa della salicina coll'acido solforico. Purificata dall'alcool, si ebbe la sostanza in aghetti bianchi dal punto di fusione 198°-199°, che dette all'analisi i numeri voluti dalla *salicina*. Per quest'ultima gli autori

(1) Tale artificio fu tentato con successo in un caso analogo da Emmerling. Berichte 34, 3. 3810 (1904).

danno i punti di fusione 198° (Schmidt) e 201° (Schiff). Il nostro prodotto, mescolato alla salicina del commercio, non ne abbassava il punto di fusione. Per accertarne ulteriormente l'identità, ne abbiamo eseguita l'idrolisi coll'emulsina ed abbiamo ottenuto la quantità voluta di saligenina ed il glucosio allo stato di fenilglucosazone.

Rimane così dimostrato che inoculando nel mais la saligenina (alcool salicilico), questa si trasforma in parte in un glucoside che è identico alla salicina.

Queste esperienze invitavano naturalmente ad altri studi che in parte stiamo compiendo e che in parte verranno iniziati nella prossima estate. Abbiamo già indizi che la salicina si forma non soltanto nelle piante vive, ma anche per azione dei fermenti esistenti nella poltiglia ottenuta triturando le piante di mais. Inoltre ci siamo proposti di provocare la sintesi di altri glucosidi in piante che, come il mais, non li contengono naturalmente, come pure di vedere quale sia il contegno di essi e dei loro prodotti di scissione in quelle piante in cui naturalmente si ritrovano.

Ci è grato esprimere in fine i nostri sentiti ringraziamenti ai dott. Gino Cacciari e Mario Tonegutti per l'efficacissimo aiuto che ci hanno prestato in queste esperienze.

Zoologia. — *Ricerche sul gen. Achanthohermes*. Nota del Socio B. GRASSI.

Botanica. — *Sulla probabile origine dell'Iris florentina L.* Nota dal Socio R. PIROTTA.

Chimica-fisica. — *Sulla tecnica delle ricerche di trasporto elettrico (e di dialisi) dei colloidi organici*. Nota del Corrispondente F. BOTTAZZI.

Le tre Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.



**Matematica.** — *Sulle soluzioni fondamentali delle equazioni alle derivate parziali.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

1. Lo studio delle soluzioni fondamentali di alcune classi di equazioni alle derivate parziali fu già oggetto di molti studi da parte dei sigg. Somigliana <sup>(1)</sup>, Fredholm <sup>(2)</sup>, Hilbert <sup>(3)</sup>, Picard <sup>(4)</sup>, Hadamard <sup>(5)</sup>, E. Levi <sup>(6)</sup>. In tali ricerche si usarono i metodi più svariati; in questa Nota io voglio dimostrare che per talune classi di equazioni totalmente ellittiche (a caratteristiche non reali) di ordine qualsiasi il classico metodo delle approssimazioni successive può bastare allo scopo. I risultati che otterremo, mentre sono meno completi di quelli già noti per le equazioni lineari, sono d'altra parte più generali, in quanto che sono applicabili anche a talune classi di equazioni non lineari. I risultati seguenti bastano però per le più importanti applicazioni di dette soluzioni fondamentali alle equazioni lineari: p. es. alla dimostrazione del teorema di esistenza per mezzo del principio di minimo <sup>(7)</sup>, e del teorema che gli integrali di un'equazione totalmente ellittica a coefficienti analitici sono analitici: per il che basta <sup>(8)</sup> saper estendere in campi arbitrariamente piccoli la formola di Green.

Io non tratterò per brevità il caso generale; e mi limiterò all'esame di un caso particolare, indicando nel punto fondamentale come si completi il metodo per le equazioni generali.

2. Sia data l'equazione ellittica

$$(1) \quad \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu + d,$$

dove  $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, d$  sono funzioni analitiche <sup>(9)</sup> delle  $x, y$  in un certo

<sup>(1)</sup> *Sui sistemi simmetrici*, ecc. Annali di Matematica, serie 2<sup>a</sup>, tomo 22, 1894.

<sup>(2)</sup> *Sur les équations de l'équilibre* etc. Acta Mathematica, tomo 23, 1900.

<sup>(3)</sup> Cfr. la Dissert. (Göttingen, 1901) di Hedrick, *Ueber den analytischen u. s. w.*

<sup>(4)</sup> Il metodo di Picard fu esteso da Holmgren, p. es. nei Mathematische Ann., tomo 58, *Ueber die Existenz. u. s. w.*

<sup>(5)</sup> *Recherches sur les solutions fondamentales*, etc. Ann. de l'École Norm. Supérieure, sér. 3, t. 21 e 22.

<sup>(6)</sup> *Sulle equazioni lineari*, ecc. Rend. del Circ. Matem. di Palermo, tomo 24, 1907.

<sup>(7)</sup> G. Fubini, *Il principio di minimo e i problemi*, ecc. Rend. del Circ. Matem. di Palermo, tomo 23, 1907.

<sup>(8)</sup> Levi, loc. cit.

<sup>(9)</sup> Basterebbe che  $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, d$  soddisfacessero a quelle condizioni di conti-

campo  $\Gamma$ . Noi non supporremo (come si potrebbe nel caso attuale)  $\alpha - 1 = \beta - 1 = \gamma = 0$ ; e ciò, perchè tale ipotesi toglierebbe al nostro metodo ogni possibilità di applicazione a equazioni lineari di ordine superiore, o dipendenti da più che due variabili indipendenti. Sia  $O$  un punto (che per semplicità supporremo essere l'origine) interno al campo  $\Gamma$ . Si dice che  $u(x, y)$  è una soluzione fondamentale della (1) relativa al punto  $O$ , se la  $u$  esiste in un intorno  $C$  di  $O$ , soddisfa ivi alla (1), è in ogni punto distinto da  $O$  finita e continua insieme colle sue derivate prime e seconde, ha nel punto  $O$  derivate prime infinite del primo ordine, ed è nel punto  $O$  infinita di ordine inferiore al primo: si assume  $\frac{1}{r(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  e  $r(x, y)$  come infinito e come infinitesimo principale.

Indichiamo con  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  i valori di  $\alpha, \beta, \gamma$  in  $O$ , e poniamo

$$\begin{aligned} \alpha_0 - \alpha &= p, \quad \beta_0 - \beta = q, \quad \gamma_0 - \gamma = r, \\ (2) \quad \alpha_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\beta_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= A(u) \\ (2)_1 \quad p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2q \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + r \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu + d &= \\ &= F[u(x, y); x, y]. \end{aligned}$$

La (1) si potrà scrivere

$$(3) \quad Au = F[u(x, y); x, y].$$

E, si ricordi,  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  sono costanti,  $p, q, r$  sono nulle in  $O$ . Se fosse identicamente  $F = 0$ , la nostra soluzione fondamentale sarebbe la

$$u_0 = \log \sqrt{\gamma_0 x^2 + \alpha_0 y^2 - 2\beta_0 xy};$$

noi, per maggior comodità di calcolo, supporremo  $\alpha_0 = \gamma_0 = 1; \beta_0 = 0$ : ciò che nulla toglie alla generalità del metodo seguente. E integreremo la (2) con approssimazioni successive, assumendo  $u_0 = \log r(x, y)$  come prima approssimazione di  $u$ . Porremo  $\varrho = \varrho(x, y; \xi, \eta)$  uguale alla distanza dei punti  $(x, y)$  e  $(\xi, \eta)$  <sup>(1)</sup>. Le equazioni, che dovremo successivamente

nuità e derivabilità (ben note dalla teoria del potenziale) che rendono legittimi i calcoli seguenti. L'analicità è invece necessaria, se si vogliono considerare anche i valori complessi delle  $x, y$  (cfr. Levi, loc. cit.).

<sup>(1)</sup> Nel caso di equazioni lineari di ordine superiore si può scrivere ancora l'equazione sotto una forma analoga alla (3). Il primo membro  $A(u)$  sarà un polinomio lineare omogeneo nelle derivate di ordine massimo, e a coefficienti costanti. Nel secondo membro i coefficienti di queste derivate saranno nulli in  $O$ . La dimostrazione continua poi affatto identica, con questa sola avvertenza che l'ufficio qui tenuto dalle  $r, \varrho$  è nel caso generale tenuto dalle soluzioni fondamentali del Somigliana (cfr. loc. cit.).



integrare per applicare il metodo delle approssimazioni successive, sono le seguenti:

$$(4) \quad \mathcal{A}(u_i) = F[u_{i-1}(x, y); x, y] \text{ per } i = 1, 2, 3, \dots,$$

donde si deduce

$$(5) \quad u_i(x, y) = h \int_C F[u_{i-1}(\xi, \eta); \xi, \eta] \log \varrho \, d\xi \, d\eta + v_i(x, y),$$

dove  $h$  è una costante numerica,  $(\xi, \eta)$  e  $(x, y)$  sono punti variabili in un campo  $C$  tutto interno a  $\Gamma$  e contenente  $O$  al suo interno,  $v_i$  è una funzione esistente in  $C$  e soddisfacente alla  $\mathcal{A}v_i = 0$ . Le funzioni  $u_i$ , così definite, esistono in  $C$  e vi soddisfano alle (4). Noi dovremo scegliere le  $v_i$ , in guisa che le  $u_i$  abbiano in  $O$  la singolarità richiesta per una soluzione fondamentale. Ora, come risulterà evidente da quanto segue, l'integrale del secondo membro della (5) è finito in  $O$ , mentre le sue derivate vi diventano infinite di ordine inferiore al primo.

Il modo più semplice di scegliere le  $v_i$  è quindi quello di porre  $v_i = \log r(x, y)$ . Con questa scelta la  $u_i$  è completamente determinata; e ci resterà solo da studiare il  $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i$ , ossia la serie

$$(6) \quad u = u_0 + w_1 + w_2 + \dots,$$

dove si è posto

$$(7) \quad w_i = u_i - u_{i-1}.$$

3. Dalle (5), (7) e dalla  $v_i = \log r$  si deduce:

$$(8) \quad \begin{cases} w_i = h \int_C F[\log r(\xi, \eta); \xi, \eta] \log \varrho \, d\xi \, d\eta \\ w_i = h \int_C F[w_{i-1}(\xi, \eta); \xi, \eta] \log \varrho \, d\xi \, d\eta \text{ per } i > 1. \end{cases}$$

Ne segue facilmente:

1°) Le  $w_i$  sono finite e continue in tutto  $C$ .

2°) Le derivate prime delle  $w_i$  per  $i > 1$  sono finite e continue in tutto  $C$ ; le derivate prime della  $w_1$  hanno in  $O$  al massimo una singolarità logaritmica.

3°) Le derivate seconde delle  $w_i$  per  $i > 2$  sono finite e continue in tutto  $C$ ; le derivate seconde di  $w_1$  e  $w_2$  hanno rispettivamente in  $O$  al massimo un infinito del primo ordine, e un infinito logaritmico.

Dimostreremo queste proprietà p. es. per la  $w_1$ ; le  $w_2, w_3, \dots$  si studiano in modo analogo. Spezziamo il campo  $C$  in tre campi  $C', C'', C'''$ , di cui i primi due siano p. es. cerchi uguali aventi il centro rispettivamente

in O, e in  $(x, y)$ , e il raggio dei quali è infinitesimo del primo ordine [rispetto a  $r(x, y)$ ]. Dalla prima delle (8) si avrà:

$$(8)_1 \quad w_1 = h \int_{C' + C'' + C'''} F[\log r(\xi, \eta); \xi, \eta] \log \varrho \, d\xi \, d\eta$$

$$(8)_2 \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = h \int_{C' + C'' + C'''} F[\log r(\xi, \eta); \xi, \eta] \frac{\partial \log \varrho}{\partial x} \, d\xi \, d\eta$$

$$(8)_3 \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = & h F[\log r(x, y); x, y] \frac{\partial}{\partial x} \int_{C''} \frac{\partial \log \varrho}{\partial x} \, d\xi \, d\eta \\ & + h \int_{C''} \} F[\log r(\xi, \eta); \xi, \eta] - F[\log r(x, y); x, y] \frac{\partial^2 \log \varrho}{\partial x^2} \, d\xi \, d\eta \\ & + h \int_{C' + C'''} F[\log r(\xi, \eta); \xi, \eta] \frac{\partial^2 \log \varrho}{\partial x^2} \, d\xi \, d\eta. \end{aligned}$$

Poichè in  $C'$  è  $r(\xi, \eta) < \varrho(x, y; \xi, \eta)$ , e in  $C''$   $r(\xi, \eta)$  è infinitesimo dello stesso ordine di  $r(x, y)$ , si trova che l'integrando del secondo membro di (8)<sub>1</sub> è in  $C'$ ,  $C''$ ,  $C'''$  minore di valore assoluto rispettivamente di (1):

$$M \left| \frac{1}{r(\xi)} \log r(\xi) \right| ; M \left| \frac{1}{r(x, y)} \log \varrho \right| ; M \left| \frac{1}{r(\xi)} \log r(\xi) \right| + M \left| \frac{1}{\varrho} \log \varrho \right| ,$$

dove  $M$  è una costante positiva abbastanza grande. Scomponendo il secondo membro di (8)<sub>1</sub> in tre integrali estesi rispettivamente a  $C'$ ,  $C''$ ,  $C'''$ , tenendo conto delle precedenti disuguaglianze, integrando con coordinate polari aventi per centro il punto O, o il punto  $(x, y)$ , si riconosce facilmente che  $w_1$  è finito in O. In modo simile si riconosce dalla (8) che  $\frac{\partial w_1}{\partial x}$  ha in O al massimo un infinito logaritmico. Quanto alla (8)<sub>3</sub>, l'integrale che figura nel primo termine del secondo membro è troppo noto, perchè ce ne dobbiamo occupare; l'integrale del terzo termine si studia in modo analogo al precedente. Ci basterà dunque occuparci dell'integrale, che costituisce il secondo termine del secondo membro di (8)<sub>3</sub>. L'integrando è il prodotto di due fattori. Il primo di essi è la differenza

$$F[\log r(\xi, \eta); \xi, \eta] - F[\log r(x, y); x, y],$$

che per il teorema della media si può considerare come il prodotto di  $\varrho$  per una quantità, che diventa nel punto O infinita al massimo del secondo ordine; questo fattore è dunque in valore assoluto minore di  $\varrho \frac{M}{r^2(x, y)}$ ,

(1) Si ricordi che  $F[\log r(\xi, \eta); \xi, \eta]$  ha in O al massimo un infinito del primo ordine.



se  $M$  è una costante positiva abbastanza grande. Osservando poi che  $\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}$

ha per  $(x, y) = (\xi, \eta)$  un infinito del secondo ordine, se si assume  $\frac{1}{\varrho}$  come

infinito principale, si trova che il secondo termine del secondo membro di

(8)<sub>3</sub> è in valore assoluto minore di  $\frac{N}{r^2(x, y)} \int_{C'} \frac{1}{\varrho} d\xi d\eta$ , se  $N$  è una co-

stante abbastanza grande. Integrando con coordinate polari aventi l'origine in  $O$ , e ricordando che la massima corda di  $C''$  è, per ipotesi, infinitesima del primo ordine rispetto a  $r(x, y)$ , si trova che il termine considerato ha pure per  $(x, y) = O$  al massimo un infinito del primo ordine. c. d. d.

Resta così dimostrato che la  $u(x, y)$  definita da (6) soddisfa *formalmente* alle condizioni volute di essere un integrale di (1), e di avere nel punto  $O$  la singolarità richiesta per una soluzione fondamentale.

4. Resta quindi solo da dimostrare la convergenza uniforme della (6), e delle serie che se ne deducono derivando una o due volte termine a termine. A tal fine ricordiamo che, se noi prendiamo dai primi tre termini di (6), tutti gli altri sono finiti e continui in tutto  $(C)$ , insieme colle loro derivate prime e seconde. Se  $\mu_i$  è il massimo valore assoluto di  $F[w_i(x, y); x, y]$  in  $C$ , si deduce con metodo oramai classico <sup>(1)</sup>, che:

$$\begin{aligned} |w_{i+1}| &< K\mu_i; \quad \left| \frac{\partial w_{i+1}}{\partial x} \right| < K\mu_i; \quad \left| \frac{\partial w_{i+1}}{\partial y} \right| < K\mu_i \\ \left| \frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial x^2} \right| &< l\mu_i; \quad \left| \frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial x \partial y} \right| < l\mu_i; \quad \left| \frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial y^2} \right| < l\mu_i, \end{aligned}$$

dove  $l$  è una costante numerica,  $K$  è una costante che si può rendere piccola a piacere, impicciolendo sufficientemente il campo  $C$ . Osservando che  $p, q, r$  sono infinitesime in  $O$ , se ne deduce

$$|F(w_{i+1})| < H\mu_i, \text{ e quindi } |\mu_{i+1}| < \mu_i H,$$

dove  $H$  è una costante, che si può rendere piccola a piacere, impicciolendo abbastanza il campo  $C$ . Queste disuguaglianze dimostrano la convergenza assoluta e uniforme della serie (6), e delle serie che se ne deducono derivando una o due volte termine a termine.

Tanto basta a dimostrare l'esistenza della soluzione fondamentale  $u(x, y)$  cercata.

<sup>(1)</sup> Cfr. p. es. Picard, *Sur les méthodes des approximations* etc. Journal di Liouville, 1890.

**Matematica.** — *Sulla caratteristica del determinante di una forma di Hermite.* Nota di O. NICOLETTI, presentata dal Socio U. DINI.

1. Siano

$$(1) \quad A(x, \bar{x}) = \sum a_{ik} x_i \bar{x}_k, \quad B(x, \bar{x}) = \sum b_{ik} x_i \bar{x}_k, \\ (\bar{a}_{ik} = a_{ki}, \bar{b}_{ik} = b_{ki}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n)$$

due forme di Hermite in  $2n$  variabili complesse coniugate  $x_1, x_2, \dots, x_n; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$  e poniamo

$$(2) \quad |A\omega_1 + B\omega_2| = |a_{ik}\omega_1 + b_{ik}\omega_2| = (AB)_n \omega_1^n + \\ (AB)_{n-1} \omega_1^{n-1} \omega_2 + \dots + (AB)_0 \omega_2^n, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n);$$

indichiamo cioè con  $(AB)_r$  ( $r = n, n-1, \dots, 0$ ) gli invarianti simultanei del fascio di forme  $A\omega_1 + B\omega_2$ . Supporremo che il determinante (2) non sia identicamente nullo.

Supponiamo anche che la forma  $B(x, \bar{x})$  non sia indefinita. È noto allora il teorema:

I divisori elementari del determinante (2), diversi da una potenza di  $\omega_1$ , sono reali e lineari <sup>(1)</sup>.

In altre parole, l'equazione in  $\omega$  (non identica):

$$(2)' \quad (AB)_0 \omega^n + (AB)_1 \omega^{n-1} + \dots + (AB)_n = 0$$

ha tutte le sue radici reali, ed una radice  $\omega_0$  di essa equazione, multipla di ordine  $k$ , rende il determinante (2), nel quale si ponga  $\omega_1 = 1, \omega_2 = \omega_0$ , di caratteristica  $n - k$ .

Ricordiamo ancora (come immediato corollario della regola di Cartesio) che in una equazione algebrica con tutte radici reali non possono mancare due o più termini consecutivi, compresi fra termini diversi da zero <sup>(2)</sup>.

Se, oltre la forma  $B$ , anche la  $A(x, \bar{x})$  si suppone non indefinita, le radici dell'equazione (2)', che non sono nulle, hanno tutte lo stesso segno; quindi, ancora per la regola di Cartesio, nell'equazione stessa non può mancare alcun termine, compreso tra due diversi da zero.

2. Dalle considerazioni precedenti si traggono conclusioni notevoli.

<sup>(1)</sup> Cfr. Muth, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler* (Teubner, Lipsia, 1899, pp. 179, 180) ed anche: Nicoletti, *Su una classe di equazioni a radici reali* (Annali di Matematica, ser. 3<sup>a</sup>, tomo IX, pp. 106-110, Milano, 1903).

<sup>(2)</sup> Cfr. Netto, *Vorlesungen über Algebra* (Teubner, Lipsia, 1896, vol. 1<sup>o</sup>, pag. 221).



Supponiamo che la forma  $B(x, \bar{x})$  non sia indefinita; si ha il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il determinante  $A = |a_{ik}|$ , ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ) abbia la caratteristica  $r$  (con  $0 \leq r \leq n$ ) è che si abbia:

$$(3)_r \quad (AB)_{r+2} = (AB)_{r+1} = 0, (AB)_r \neq 0 \quad (1).$$

Il teorema è evidente per  $r = n, r = n - 1$ ; per  $r < n - 1$ , ricordando che la equazione (2)' ha tutte le radici reali, dalle (3)<sub>r</sub> si trae (poichè  $(AB)_r \neq 0$ ):

$$(AB)_{r+3} = (AB)_{r+4} = \dots = (AB)_n = 0$$

e quindi l'equazione (2)' ha la radice zero multipla dell'ordine  $n - r$  (e non maggiore, poichè  $(AB)_r \neq 0$ ); perciò il determinante (2). nel quale si sia fatto  $\omega_1 = 1, \omega_2 = 0$ , cioè il determinante della forma  $A$ , ha la caratteristica  $r$ , il che dimostra il teorema.

In guisa del tutto analoga si ha:

Se anche la forma  $A(x, \bar{x})$  non è indefinita, condizione necessaria e sufficiente perchè il determinante  $A$  abbia la caratteristica  $r$  (con  $0 \leq r \leq n$ ) è che si abbia:

$$(3)'_r \quad (AB)_{r+1} = 0, (AB)_r \neq 0.$$

In questo caso dunque la condizione  $(AB)_{r+2} = 0$  è contenuta nelle altre due (2).

3. Poniamo in particolare

$$B(x, \bar{x}) = \sum_1^m x_i \bar{x}_i, \quad (m \leq n)$$

e distinguiamo due casi:

a) Sia  $m = n$ . È  $(AB)_0 = 1$  ed  $(AB)_r$  è la somma dei minori principali di ordine  $r$  del determinante  $A$ . Abbiamo dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il determinante  $A$  di una forma di Hermite abbia la caratteristica  $r$  è che sian nulle le somme dei minori principali di ordine

(1) Poniamo, come è naturale,  $(AB)_{n+1} = (AB)_{n+2} = 0$ .

(2) Questo in particolare accade quando si abbia

$$A(x, \bar{x}) = \sum_1^p \Omega_\alpha(x) \cdot \overline{\Omega_\alpha(x)},$$

essendo le  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_p$   $p$  forme lineari nelle  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . In questo caso il determinante  $A$  si ottiene moltiplicando (per righe) la matrice delle forme  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_p$  per quella delle forme coniugate: se in particolare le forme stesse sono reali, il determinante  $A$  è il quadrato per righe della matrice delle forme  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_p$ .

$r+1$  ed  $r+2$  del determinante stesso e non quella dei minori principali di ordine  $r$ .

Se la forma  $A$  di Hermite non è indefinita, è necessario e sufficiente sia nulla la somma dei minori principali di ordine  $r+1$  e non quella dei minori di ordine  $r$ .

Ne segue evidentemente:

Se un determinante  $A$  di Hermite ha la caratteristica  $r$ , vi è in esso qualche minore principale di ordine  $r$  diverso da zero.

*b)* Sia  $m < n$ . Perchè il determinante (2) non sia identicamente nullo, la matrice delle ultime  $n - m$  righe (o colonne) del determinante  $A$  deve avere la caratteristica  $n - m$ ;  $(AB)_r$  è poi (per  $r \geq n - m$ ) uguale alla somma dei minori principali di ordine  $r$  del determinante  $A$ , i quali contengono il minore di ordine  $n - m$  delle ultime  $n - m$  righe e colonne.

Supponiamo in particolare che questo minore sia diverso da zero; è allora anche soddisfatta la condizione che la matrice delle ultime  $n - m$  righe (colonne) di  $A$  abbia la caratteristica  $n - m$  ed è insieme  $(AB)_{n-m} \neq 0$ . Abbiamo così il teorema:

Sia  $A_t$  un minore principale diverso da zero, di ordine  $t$ , del determinante  $A$  di Hermite. Condizione necessaria e sufficiente perchè il determinante  $A$  abbia la caratteristica  $r \geq t$ , è che sian nulle le somme dei minori principali di ordine  $r+1$  ed  $r+2$  del determinante  $A$  che contengono  $A_t$  (se la forma  $A(x, \bar{x})$  non è indefinita, la somma dei minori principali di ordine  $r+1$  che contengono  $A_t$  e non quella dei minori principali di ordine  $r$ , che contengono  $A_t$ ).

E come sopra, ne segue:

Se un determinante  $A$  di Hermite ha la caratteristica  $r$  ed  $A_t$  è un suo minore principale di ordine  $t$ , diverso da zero, vi è in  $A$  qualche minore principale di ordine  $r$ , diverso da zero, che contiene  $A_t$ .

4. *a)* Se gli elementi  $a_{ik}$  si suppongono reali, il determinante  $A$  è simmetrico, ed il primo teorema del n. 2 è noto in parte per  $r = n - 2$ .

*b)* Gli elementi  $a_{ik}$  siano immaginari puri, e quindi sia  $a_{ik} = -a_{ki}$ ; dividendone tutti gli elementi per  $i$ , il determinante  $A$  si riduce ad un determinante emisimmetrico reale. In questo caso tutte le  $(AB)_r$  con  $r \equiv 1 \pmod{2}$  sono identicamente nulle; deve dunque nella (3)<sub>*r*</sub> aversi  $r \equiv 0 \pmod{2}$ , ed essendo allora identicamente  $(AB)_{r+1} = 0$ , le (3)<sub>*r*</sub> si riducono alle due condizioni:

$$(AB)_{r+2} = 0, \quad (AB)_r \neq 0, \quad (r \equiv 0 \pmod{2}).$$



Ne seguono, in particolare, i teoremi:

Qualunque determinante emisimmetrico, ad elementi reali, ha caratteristica pari.

Perchè un determinante  $A$  emisimmetrico, reale, abbia la caratteristica  $2s$ , è necessario e sufficiente che sia nulla la somma dei suoi minori principali di ordine  $2s+2$ , ma non quella dei minori principali di ordine  $2s$ .

Se un determinante emisimmetrico, reale, ha la caratteristica  $2s$ , vi è in esso qualche minore principale di ordine  $2s$  diverso da zero.

Sia  $A_{2k}$  un minore principale, di ordine  $2k$ , diverso da zero, del determinante emisimmetrico reale  $A$ ; perchè questo abbia la caratteristica  $2s$  (con  $s \geq k$ ) è necessario e sufficiente che sia nulla la somma dei suoi minori principali di ordine  $2s+2$  che contengono il minore  $A_{2k}$ , non lo sia la somma analoga dei minori principali di ordine  $2s$ .

5. Facciamo ancora una osservazione. Il teorema generale, dimostrato al n. 2, dà come condizioni necessarie e sufficienti perchè il determinante  $A$  di Hermite abbia la caratteristica  $r$ , le due eguaglianze  $(AB)_{r+1} = (AB)_{r+2} = 0$  e la disuguaglianza  $(AB)_r \neq 0$ .

È facile vedere che *queste condizioni sono indipendenti*. Osserviamo perciò innanzi tutto che l'essere  $(AB)_r \neq 0$ , porta che il determinante della forma  $B(x, \bar{x})$ , non indefinita per ipotesi, ha una caratteristica non minore di  $n-r$  e quindi non può aversi identicamente (cioè qualunque siano le  $a_{ki} = \bar{a}_{ki}$ )  $(AB)_s = 0$  con  $s > r$ . Osserviamo inoltre che qualunque equazione  $G(\omega) = 0$  di grado  $m \leq n$ , a radici tutte reali, può sempre riguardarsi come ottenuta eguagliando a zero il determinante del fascio di due forme di Hermite in  $2n$  variabili, la seconda delle quali non sia indefinita. Se è infatti

$$G(\omega) = (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) \dots (\omega - \omega_m)$$

basta porre per questo:

$$A(x, \bar{x}) = \sum_1^m \omega_i x_i \bar{x}_i + \sum_{m+1}^n x_k \bar{x}_k ; \quad B(x, \bar{x}) = \sum_1^m x_i \bar{x}_i .$$

Orà è possibile, in infiniti modi, costruire una equazione, con radici tutte reali, nella quale manchi un termine di posto assegnato (purchè i due che lo comprendono abbiano coefficienti diversi da zero e di segno contrario); in particolare potremo fare in modo che si abbia  $(AB)_{r+1} = 0$ , con  $(AB)_r \neq 0$  ed insieme  $(AB)_{r+2} \neq 0$ , ed anche  $(AB)_{r+1} \neq 0$  ed  $(AB)_{r+2} = 0$  (ed insieme  $(AB)_{r+3} \neq 0$ ). Ne risulta senz'altro la nostra asserzione. Questo non esclude però, come è ben naturale, che per classi *particolari* di determinanti di Hermite (come ad es., quando anche la forma  $A$  non è indefinita) queste condizioni non possano ridursi ad un numero minore.

**Meccanica applicata.** — *Sopra un brevetto Crocco, relativo all'attacco delle ali di un aeroplano.* Nota del dott. L. ORLANDO, presentata dal Corrisp. V. REINA.

In un articolo firmato E. R., comparso nel recente n. 7 della pregevole rivista l'*Aerophile*, che si pubblica a Parigi, è annunciata un'idea sull'attacco delle ali di un aeroplano <sup>(1)</sup>. L'idea è forse buona, ma è certamente meno nuova del detto articolo che ne fa cenno, perchè essa è già sviluppata in un brevetto Crocco, acquistato il 3 marzo 1903 (R. G., vol. 45. n. 66864; R. A., vol. 169, n. 28). Coincidenze sulle medesime idee non sono rare nella scienza, nè tanto meno in un'industria giovane e fervida come l'industria aeronautica.

Per dire con chiarezza di che si tratta, riferirò prima testualmente il brevetto Crocco.

« Descrizione del trovato avente per titolo: *Attacco elastico per organi di sostegno degli aeroplani*, del sig. G. A. Crocco dimorante in Roma :

« Nei tipi di aeroplani finora proposti, gli organi di sostegno, mediante i quali l'apparecchio si mantiene librato nell'aria, e consistenti in ali semplici o multiple, variamente conformate, si trovano sempre connessi rigidamente, per più punti, al corpo dell'apparecchio, e partecipano in uguale misura con esso alle oscillazioni cui va soggetto per cause perturbatrici durante la corsa. Queste oscillazioni danno luogo a variazioni nell'intensità della spinta ascensionale, che possono raggiungere valori molto forti, fino a compromettere anche l'equilibrio dell'apparecchio.

« La presente invenzione si propone di ovviare a tali inconvenienti, cioè di ridurre per quanto è possibile le variazioni del valore della spinta ascensionale, e di conservarne costante il senso, anche nel caso di oscillazioni molto ampie, sostituendo all'attacco rigido delle ali (semplici o multiple) un attacco elastico, opportunamente regolato, che permetta a queste di variare automaticamente, senza il sussidio di altri congegni accessori, la loro inclinazione rispetto all'asse dell'apparecchio; nel modo che verrà spiegato in seguito.

« Come si comprende facilmente, un tale sistema di attacco può essere praticamente attuato in svariati modi.

« Nel disegno qui annesso è rappresentata schematicamente, a titolo di esempio, una forma di esecuzione, secondo la quale le ali *a* sono unite al

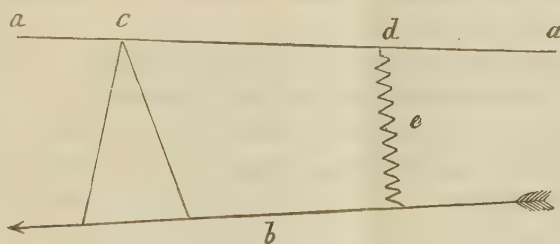
<sup>(1)</sup> E. R., *L'équilibre des aéroplanes par la variation automatique de l'angle d'attaque*. L'*Aérophile*, XVII<sup>e</sup> année, N. 7, 1<sup>o</sup> aprile 1909.



corpo *b* dell'apparecchio per due punti, uno dei quali *c* è fisso, ossia rigidamente collegato con *b*, e l'altro *d* è trattenuto ad una distanza variabile da *b*, per mezzo di una molla *e*, come si vede sul disegno, o per mezzo di qualsiasi altro sistema di attacco elastico, che ne permette lo spostamento entro certi limiti stabiliti.

« La posizione dei punti *c* e *d* sulle ali sarà scelta nel modo più conveniente secondo le circostanze.

« Da questa disposizione consegue che, se per una ragione qualsiasi l'apparecchio viene durante il moto ad inclinarsi verso l'innanzi, traendo di conseguenza la diminuzione della pressione, normale alla superficie *a*, per la quale era stato calcolato il distendimento della molla *e*, questa si raccorcia, tirando verso *b* la superficie *a*, cosicchè l'ala riacquista rispetto alla direzione del suo movimento un'inclinazione maggiore, facendo crescere di conseguenza la spinta verticale.



« Se l'apparecchio viene invece ad inclinarsi verso l'indietro, aumentando per questo fatto la pressione sulle ali *a*, la molla *e* si distende, il punto *d* si allontana da *b*, e con ciò si riduce il valore della spinta verticale.

« Così anche si vede che diminuendo la velocità relativa dell'apparecchio nel mezzo ambiente, la molla *e* tende a far crescere l'angolo fra *a* e *b*, aumentando la forza ascensionale; e viceversa tende a far diminuire tale angolo, diminuendo la forza ascensionale, quando la velocità relativa nel mezzo ambiente cresce.

« In breve, quest'attacco elastico funziona da regolatore per mantenere presso a poco costante la forza ascensionale, e più regolare l'andamento dell'apparecchio, malgrado il variar del vento e le inevitabili oscillazioni dell'apparecchio.

« Si comprende che gli adattamenti dell'apparecchio alle condizioni ambientali avvengono in modo continuo o per gradi piccolissimi.

« Si comprende ancora come, entro i limiti stabiliti, sia impedito il mancare improvviso della forza ascensionale cui andrebbero soggetti gli apparecchi finora ideati, anche quando l'ampiezza del beccheggio superi l'angolo di incidenza delle ali, e come infine tale angolo d'incidenza si possa,

ove occorra, tenere minore di quello creduto finora necessario alla sicurezza dell'apparecchio.

« A titolo di esempio, è stato indicato un modo d'attacco nel quale uno dei punti di sospensione è collegato rigidamente all'apparecchio, ma l'attacco potrebbe essere elastico per entrambi i punti di sospensione; opportunamente regolata essendo la tensione delle molle.

« Rivendicazione:

« Un sistema di attacco elastico per organi di sostegno degli aeroplani, contraddistinto da ciò che i detti organi di sostegno sono uniti elasticamente al corpo dell'apparecchio, in modo da poter assumere e mantenere, automaticamente e senza il sussidio di altri congegni accessori, un' inclinazione presso a poco costante rispetto alla direzione del movimento, dalla quale condizione dipende la quasi costanza della forza ascensionale e l'equilibrio dell'apparecchio ».

Alle parole del geniale inventore non sarà forse inopportuno far seguire alcune brevi considerazioni teoriche.

Consideriamo, per generalità, il caso di due molle, una attaccata in  $c$  e l'altra in  $d$ . Indichiamo colle rispettive notazioni  $T_1, l_1$  la tensione e la lunghezza della molla posteriore, attaccata in  $d$ , e con  $T_2, l_2$  la tensione e la lunghezza della molla anteriore, attaccata in  $c$ . Noi possiamo sempre scrivere le due relazioni

$$T_1 = -\mu_1 l_1 \qquad T_2 = -\mu_2 l_2.$$

Se in queste due relazioni le grandezze  $\mu_1$  e  $\mu_2$  si ritengono costanti, allora noi avremo con ciò espressa una legge che per le molle, entro opportuni limiti, è praticamente accettabile: « *ut tensio sic vis* » (<sup>1</sup>).

Intanto noi possiamo osservare che vale la formula

$$dl_2 - dl_1 = (h_1 + h_2) d\alpha,$$

dove  $\alpha$  è l'angolo di  $a$  con  $b$ , ed  $h_1, h_2$  denotano le rispettive distanze fra il punto d'applicazione della pressione  $P$ , che agisce contro l'ala  $a$  nella sezione considerata, e gli attacchi  $c$  e  $d$  delle molle. Questa formula esprime che l'allungamento relativo elementare di  $l_2$  rispetto ad  $l_1$  è l'elemento d'arco, di raggio  $h_1 + h_2$ , corrispondente all'ampiezza angolare elementare  $d\alpha$ .

Si deduce subito

$$d\alpha = \frac{1}{h_1 + h_2} \left( \frac{dT_2}{\mu_2} - \frac{dT_1}{\mu_1} \right).$$

(<sup>1</sup>) « *tensio* » qui significa, come è chiaro, *distensione*, cioè *allungamento*; la parola « *vis* » denota la *forza di tensione* che provoca tale allungamento. Questa legge è valida per distensioni anche abbastanza ampie di molle e di fili elastici.



Ora le tre forze  $P$ , pressione totale,  $T_1$  e  $T_2$ , tensioni delle molle, sono quasi parallele: l'angolo  $\alpha$  è destinato a non superare pochi gradi, l'angolo d'attrito dell'aria è molto piccolo; dunque le tre forze si possono, senza pratici errori, ritenere parallele.

Ammessi ciò, scriveremo le due formule

$$dT_1 + dT_2 = -dP$$

$$h_1 dT_1 - h_2 dT_2 = 0,$$

e ne dedurremo

$$dT_1 = -\frac{h_2}{h_1 + h_2} dP \quad dT_2 = -\frac{h_1}{h_1 + h_2} dP,$$

e poi

$$d\alpha = \left( \frac{h_1}{\mu_2} - \frac{h_2}{\mu_1} \right) \frac{dP}{(h_1 + h_2)}.$$

Posto

$$n = \left( \frac{h_2}{\mu_1} - \frac{h_1}{\mu_2} \right) \frac{1}{(h_1 + h_2)^2}$$

noi possiamo, trascurando le piccole variazioni di  $h_1$  e di  $h_2$ , che non fanno poi neanche variare  $h_1 + h_2$ , ritenere che questa grandezza  $n$  sia una costante. E allora, se integriamo  $d\alpha$  da  $\alpha_0$  ad  $\alpha$ , otteniamo l'importante relazione

$$(1) \quad \alpha = \alpha_0 - n(P - P_0).$$

Supponendo  $n$  positivo, cioè supponendo che la molla posteriore sia più cedevole di quella anteriore, noi otteniamo che  $\alpha$  e  $P$  decrescono o crescono in sensi opposti.

È importante per la teoria dell'aeroplano esprimere  $P - P_0$  in funzione dei seguenti parametri:  $v$ , velocità dell'aeroplano in corsa;  $\varphi$ , angolo che l'asse di spinta fa colla traiettoria nell'istante considerato.

Intanto, per piccoli angoli  $\alpha$  e  $\varphi$ , tali che si possa trascurare una grandezza dell'ordine di  $(\alpha + \varphi)^3$ , vale la formula canonica

$$(2) \quad P = Kv^2(\alpha + \varphi),$$

dove  $P$  è dunque la pressione totale, e  $K$  è un coefficiente di superficie e di forma, ritenuto costante.

Fra questa formula e la (1) eliminiamo  $\alpha$ . Risulta

$$P = Kv^2 \alpha_0 - nKv^2(P - P_0) + Kv^2 \varphi,$$

cioè  $P(1 + nKv^2) = Kv^2 \alpha_0 + nKv^2 P_0 + Kv^2 \varphi$ . Differenziando, scriveremo  $(1 + nKv^2) dP + 2nKv P dv = 2Kv \alpha_0 dv + 2nKv P_0 dv + 2Kv \varphi dv + Kv^2 d\varphi$ . Poniamo

$$G = 1 + nKv_0^2,$$

e mettiamoci nelle condizioni di regime ( $v = v_0$ ,  $\varphi = 0$ ), osservando che  $\varphi dv$  è, per la piccolezza di  $\varphi$ , trascurabile di fronte alle altre quantità. Risulta

$$(3) \quad dP = \frac{2Kv_0 \alpha_0}{G} dv + \frac{Kv_0^2}{G} d\varphi,$$

la quale si può anche scrivere

$$(4) \quad dP = \frac{2P_0}{Gv_0} dv + \frac{P_0}{G\alpha_0} d\varphi,$$

tenendo conto che dalla (2), nelle condizioni di regime, si deduce  $P_0 = Kv_0^2 \alpha_0$ .

Integrando, e ponendo  $v - v_0 = u$ , otteniamo

$$(5) \quad P - P_0 = \frac{2P_0}{Gv_0} u + \frac{P_0}{G\alpha_0} \varphi.$$

Quest'espressione di  $P$  in funzione di  $v$  e di  $\varphi$  contiene l'elemento costruttivo  $G$ . Se l'attacco delle ali fosse rigido, allora sarebbe sempre  $\alpha = \alpha_0$  ed  $n = 0$ ; la presenza di  $n > 0$  rende  $G > 1$ , e l'attacco elastico funziona da moderatore di forza ascensionale. Per  $G = 1$ , siamo nel caso dell'attacco rigido; per  $G$  notevolmente maggiore, la (5) mostra che le variazioni di  $v$  e di  $\varphi$  sono molto meno risentite sulla forza ascensionale  $P$ . Per  $G = 10$ , valore praticamente realizzabile, esse sono risentite nella proporzione di 0,1.

In una Memoria, compilata in un laboratorio al quale egregi uomini imprimono il carattere delle loro chiare idee, sono indicate tutte le principali azioni che il valore di  $G$  esercita sui movimenti dell'aeroplano; alcuni di questi effetti sono utili, altri dannosi; e sarebbe difficile giudicare questo dispositivo nel suo complesso, senza riferirsi ai particolari fini ai quali potrà adoperarsi.

**Matematica.** — *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.



Fisica. — *Le tensioni create in un corpo elastico dalle distorsioni di Volterra, e la conseguente doppia rifrazione accidentale.* Nota di O. M. CORBINO, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. La verifica sperimentale delle teorie dell'elasticità ha condotto finora a due difficoltà: mentre, invero, tolti pochi casi semplicissimi, le forze esterne vengono d'ordinario esercitate in modo discontinuo lungo i punti della superficie, non è poi in generale accessibile alla esperienza la prevista distribuzione delle tensioni o delle deformazioni all'interno del corpo.

La prima difficoltà è eliminata con quelle particolari deformazioni considerate dal prof. Volterra nella sua Memoria: *Sull'equilibrio dei corpi elastici a connessioni multiple*, poichè è allora possibile creare nel corpo un sistema di deformazioni o di tensioni non semplici senza l'intervento di forze esterne.

Le previste variazioni di forma furono in realtà constatate con anelli cilindrici di caoutchouc che, dopo asportazione di una parte di sostanza, venivano rincollati sulle faccie del taglio. È naturale quindi l'idea di esaminare più a fondo le conseguenze della teoria, servendosi d'un corpo elastico trasparente, come la gelatina, e studiando per mezzo della birifrangenza accidentale acquistata la distribuzione delle tensioni create dalle distorsioni.

Perchè la previsione teorica degli effetti osservabili possa farsi completamente, sarà vantaggioso supporre che un anello di piccola altezza, dopo un *taglio radiale* o *parallelo*, e la rincollatura delle due facce del taglio, sia esaminato in luce polarizzata parallela, *propagantesi nel senso dell'asse del cilindro*. Le figure che si ottengono allora, osservando attraverso ad un nicol, o proiettando su uno schermo e attraverso un analizzatore l'immagine dell'anello, permettono un controllo molto rigoroso della teoria nella parte più interessante di questa, relativa alle tensioni esistenti nel piano  $xy$  normale all'asse del cilindro.

Nella Memoria del prof. Volterra son date già le espressioni analitiche di queste tensioni. Sarà appunto oggetto di questa Nota l'esame delle formule fondamentali, e la loro interpretazione relativamente agli effetti di birifrangenza che accompagnano le distorsioni, per poter procedere al confronto coi risultati delle esperienze eseguite su mio consiglio dal sig. Trabacchi, il quale, superando notevoli difficoltà tecniche, è riuscito a confermare anche nei più imprevedibili particolari le conseguenze della teoria.

2. Le formole del prof. Volterra, relative al taglio radiale e al taglio parallelo, danno per ogni punto  $x, y$  dell'anello le tensioni  $t_{11}, t_{22}$  parallele a due assi fissi, e la tensione di scorrimento  $t_{12}$ . Da queste si passa imme-

diatamente alle dilatazioni  $\gamma_{11}, \gamma_{12}$  nel senso degli assi e allo scorrimento  $\gamma_{12}$ , in virtù delle relazioni:

$$(1) \quad t_{11} = L\Theta + 2K\gamma_{11} \quad , \quad t_{22} = L\Theta + 2K\gamma_{22} \quad , \quad t_{12} = K\gamma_{12}$$

ove  $\Theta$  è la dilatazione cubica; ed  $L$  e  $K$  sono le due costanti elastiche del corpo.

D'altra parte se indichiamo con  $\gamma'_{11}$  e  $\gamma'_{12}$  le dilatazioni *principali* in ciascun punto del corpo (nel senso degli assi principali della deformazione, variabili da punto a punto), la birifrangenza  $\mathcal{A}$  in quel punto è proporzionale alla differenza  $\gamma'_{11} - \gamma'_{12}$ , come risulta da tutte le esperienze sulla doppia rifrazione accidentale. Ora chiamando  $\alpha$  l'angolo formato dagli assi principali di cui sopra con gli assi fissi, la direzione degli assi principali è data punto per punto, da

$$(2) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11} - \gamma_{12}}$$

ovvero per le (1), da

$$(3) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{t_{12}}{\frac{1}{2}(t_{11} - t_{12})}.$$

Per la birifrangenza  $\mathcal{A}$  avremo analogamente, indicando con  $A$  una quantità costante per una data lamina,

$$\mathcal{A} = A(\gamma'_{11} - \gamma'_{12}).$$

Ma

$$(\gamma'_{11} - \gamma'_{22})^2 = (\gamma_{11} - \gamma_{22})^2 + \gamma_{12}^2$$

e quindi misurando  $\mathcal{A}$  con una conveniente unità

$$(4) \quad \mathcal{A}^2 = \frac{1}{4}(t_{11} - t_{22})^2 + t_{12}^2.$$

Si ottiene con ciò questo risultato, di cui è evidente la connessione con la teoria delle coniche: in un triangolo rettangolo (fig. 1), avente per ca-

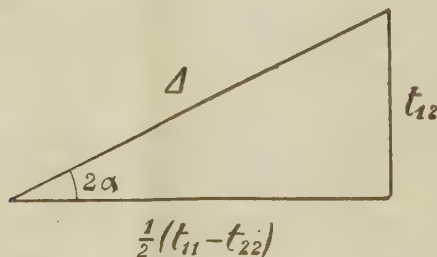


FIG. 1.

teti  $t_{12}$ , e  $\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22})$  l'angolo opposto al primo è eguale a  $2\alpha$ , e determina così punto per punto la direzione della birifrangenza, mentre l'ipotenusa misura l'intensità della birifrangenza medesima.

Supponiamo adesso di disporre la lamina tra due polarizzatori incrociati, e sia  $\varphi$  l'angolo formato dalla sezione principale del polarizzatore con



la direzione  $x$  lungo la quale fu eseguito il taglio. L'intensità  $I$  della luce emergente da ciascun punto della lamina sarà data da

$$I^2 = \text{sen}^{22}(\alpha - \varphi) \text{sen}^2(hA)$$

ove  $h$  è una costante che dipende, per una data lamina, dalla lunghezza d'onda della luce impiegata.

Si osserverà quindi un sistema di linee, assolutamente nere, passanti per tutti i punti ove

$$(5) \quad \text{sen } 2(\alpha - \varphi) A = 0$$

e quindi le equazioni delle linee nere saranno

$$(6) \quad A = 0$$

per qualunque valore di  $\varphi$ , e

$$(7) \quad \text{sen } 2(\alpha - \varphi) = 0$$

per qualunque valore di  $A$ .

L'ultima relazione per  $\varphi = 0$  diviene, per la proprietà messa in chiaro dalla fig. 1,

$$(8) \quad t_{12} = 0$$

e per  $\varphi = 45^\circ$ ,

$$(9) \quad t_{11} - t_{22} = 0$$

Adunque le linee nere osservate con polarizzatori incrociati, di cui l'uno diretto secondo la linea del taglio corrispondono all'equazione (8), e le altre osservate quando il taglio è a  $45^\circ$  dai polarizzatori corrispondono all'equazione (9).

3. *Caso del taglio radiale.* — Dalle formule del Volterra si ricava per questo caso:

$$t_{12} = a \frac{xy}{r^2} \left[ 1 - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1^2 - \log R_2^2) \frac{1}{r}}{R_1^2 - R_2^2} \right]$$

$$t_{11} - t_{22} = a \frac{y^2 - x^2}{r^2} \left[ 1 - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1^2 - \log R_2^2) \frac{1}{r}}{R_1^2 - R_2^2} \right]$$

ove  $a$  è una costante,  $r$  la distanza del punto  $x, y$  dal centro;  $R_1$  ed  $R_2$  il raggio esterno e l'interno dell'anello cilindrico.

La (3) ci dà, ponendo  $\frac{y}{x} = \text{tg } \vartheta$ ,

$$(10) \quad \text{tg } 2\alpha = \text{tg } 2\vartheta$$

cioè in ogni punto il raggio vettore e la sua normale sono gli assi principali della dilatazione; e la direzione dell'asse di birifrangenza coincide con una di quelle rette.

Osservando tra polarizzatori incrociati si avrà una linea nera, per qualunque orientazione della lamina, nei punti ove

$$A = 0$$

cioè ov'è insieme

$$t_{11} - t_{22} = 0, t_{12} = 0$$

e perciò l'equazione di quella linea sarà

$$r^2 = \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1^2 - \log R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2}$$

che rappresenta una circonferenza di raggio

$$r = R_1 R_2 \sqrt{\frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}}$$

Inoltre si avranno delle altre linee nere corrispondenti all'equazione (7), che per la (10) diviene:

$$\vartheta = \varphi + m \frac{\pi}{2}.$$

ove  $m$  è un numero intero qualsiasi.

Si avrà quindi un cerchio ed una croce, con le braccia parallele alle sezioni principali dei polarizzatori; orientando comunque la lamina nel suo piano il cerchio persisterà, e la croce conserverà le sue braccia permanentemente orientate secondo le sezioni principali dei polarizzatori incrociati.

Si noti infine che la circonferenza lungo la quale la lamina resta priva di birifrangenza ( $\mathcal{A} = 0$ ) non coincide con la *fibra neutra* del Volterra, com'era del resto prevedibile, poichè quest'ultima è definita da condizioni diverse.

4. *Caso del taglio parallelo.* — Dalle formole del Volterra relative a questo caso, trasformandole in coordinate polari, e denotando con  $a, b, c, d, e$ , i coefficienti indipendenti dalle coordinate del punto che successivamente s'incontrano nella formola che dà  $t_{12}$ , si ottiene con dei calcoli facili:

$$t_{12} = \frac{a}{r} \sin \vartheta \left\{ b - 1 + 2c(4 \cos^2 \vartheta - 1) \left( 1 - \frac{2d}{r^2} \right) + er^2 \right\}$$

$$t_{11} - t_{22} = \frac{a}{r} \cos \vartheta \left\{ b - 1 - 2c(4 \sin^2 \vartheta - 1) \left( 1 - \frac{2d}{r^2} \right) + er^2 \right\}$$

nelle quali  $a$  contiene l'ampiezza del taglio;  $a, b, c$ , le costanti elastiche del corpo;  $d$  i raggi  $R_1$  e  $R_2$  dell'anello,  $e$  le costanti elastiche e i raggi.

Nel caso della gelatina si può porre il coefficiente di Poisson eguale a  $\frac{1}{2}$ ; e allora quei coefficienti divengono

$$b = 0, c = \frac{1}{2}, d = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2}, e = \frac{2}{R_1^2 + R_2^2}.$$

Esaminando la lamina tra polarizzatori incrociati, essendo la direzione del taglio parallela o normale al piano di polarizzazione, si osserveranno delle linee corrispondenti all'equazione

$$t_{12} = 0$$



la quale dà due linee: una corrispondente a  
 $\text{sen } \vartheta = 0$

che rappresenta la direzione del taglio; l'altra all'equazione in  $r$  e  $\vartheta$ :

$$r^4 + 2\varrho_1^2 \cos 2\vartheta r^2 - (1 + 2 \cos 2\vartheta) \varrho^4 = 0$$

ove si è posto

$$\varrho_1^2 = \frac{R_1^2 + R_2^2}{2}, \varrho^2 = R_1 R_2.$$

Denotiamo con  $\varepsilon$  il rapporto tra il raggio esterno  $R_1 = R$  e l'interno  $R_2$ ; e risolviamo la precedente equazione rispetto a  $r^2$ . Si otterrà:

$$(11) \quad r^2 = \frac{1 + \varepsilon^2}{2\varepsilon^2} R^2 \left[ \sqrt{\cos^2 2\vartheta + (1 + 2 \cos 2\vartheta) \frac{4\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2)^2} - \cos 2\vartheta} \right].$$

Si riconosce subito che la curva che rappresenta  $r$  in funzione di  $\vartheta$  è simmetrica rispetto agli assi. Essa è stata costruita per punti, nella fig. 2, ammettendo che sia  $\varepsilon = 2, 5$ ; condizione prossima a quella realizzata nelle esperienze. Per  $\vartheta = 90^\circ$  si ha, *qualunque sia*  $\varepsilon$ ,

$$r = R$$

e la curva risulta in quel punto tangente al cerchio esterno.

Una seconda soluzione, corrispondente al valore negativo del radicale, dà valori di  $r$  in generale minori del raggio interno dell'involucro, e che perciò non hanno alcun significato per noi; ma per  $\vartheta = 90^\circ$  vi corrisponde un valore  $r = R_1$ , cosicchè anche i punti M, N soddisfano alla condizione  $t_{12} = 0$ .

Orientando il taglio della lamina a  $45^\circ$  dai polarizzatori, le linee nere corrispondono all'equazione

$$t_{11} - t_{22} = 0$$

che definisce una retta

$$\cos \vartheta = 0$$

normale alla linea del taglio, e una curva che ha per equazione

$$r^4 - 2\varrho_1^2(1 - \cos 2\vartheta) r^2 + (1 - 2 \cos 2\vartheta) \varrho^4 = 0.$$

Questa risolta rispetto a  $r^2$  dà:

$$(12) \quad r^2 = \frac{1 + \varepsilon^2}{2\varepsilon^2} R^2 \left[ \sqrt{(1 - \cos 2\vartheta)^2 + (-1 + 2 \cos 2\vartheta) \frac{4\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2)} + 1 - \cos 2\vartheta} \right]$$

È notevole che questa relazione si ottiene dalla precedente (11) sostituendo  $\cos 2\vartheta - 1$  al posto di  $\cos 2\vartheta$ . Lo stesso può dirsi per  $\frac{t_{12}}{\text{sen } \vartheta}$  e  $\frac{t_{11} - t_{22}}{\cos \vartheta}$ .





Per  $\vartheta = 45$  si hanno ancora qui le soluzioni singolari  $r = R_1$  corrispondenti ai punti PQRS della figura, analoghi ai punti M, N della fig. 2.

Le due curve (10) e (11) e gli assi  $x$  e  $y$  dividono la lamina in sei regioni; passando dall'una alla contigua s'inverte il segno di  $t_{12}$  o  $t_{11} - t_{22}$ . Se ne può arguire la distribuzione generale della direzione e dell'intensità della birifrangenza.

I due sistemi di linee, insieme considerati, danno nella loro parte comune i punti ove è contemporaneamente

$$t_{11} - t_{22} = 0 \quad , \quad t_{12} = 0$$

cioè:

$$A = 0.$$

Or le due curve (11), (12) non hanno alcun punto comune, com'è facile riconoscere, poichè è sempre  $\varepsilon > 1$ . Adunque la lamina non possiede alcuna linea neutra, o sprovvista di birifrangenza, ma solo sei punti neutri; e precisamente i punti d'incontro della curva (11) con l'asse  $x$  del taglio.

È questo un risultato veramente notevole.

Le quattro regioni in cui, secondo la figura del Volterra, si divide l'anello, e dentro le quali la sostanza è alternativamente compressa e dilatata, si comportano ben diversamente nei riguardi della birifrangenza; nè c'è da sorprendersi di questa apparente contraddizione, poichè il Volterra si occupa della complessiva dilatazione cubica nelle quattro regioni, mentre la birifrangenza dipende dalla differenza delle dilatazioni principali nel piano  $xy$ .

Un calcolo analogo bisognerebbe eseguire, introducendo oltre alle  $t$ , finora considerate, anche la  $t_{33}$  nel senso  $z$ , per interpretare correttamente le esperienze del Rolla, in cui si osservava attraverso tubi affondati nel cilindro di gelatina e paralleli al piano  $xy$  la doppia rifrazione rispetto alla luce che si propaga a  $45^\circ$  dal taglio e normalmente all'asse  $z$ .

La direzione della birifrangenza in ciascun punto è data per la (3), da

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \vartheta \frac{r^2 + 2\varrho^2(\cos^2 \vartheta - 1)r^2 - (4\cos^2 \vartheta - 1)\varrho^4}{r^4 - 4\varrho^2 \sin^2 \vartheta r^2 + (4\sin^2 \vartheta - 1)\varrho^4}.$$

Questa equazione, per ciascun valore di  $\operatorname{tg} 2\alpha$ , definisce in  $r, \vartheta$  una curva, che potrebbe chiamarsi una isogonica, e che riunisce tutti i punti ove la direzione di birifrangenza è ugualmente inclinata rispetto alla linea del taglio. Così le (10) e (11) rappresentano la isogoniche per  $\alpha = 0$ , e per  $\alpha = 45^\circ$ . Sperimentalmente, se i polarizzatori fanno l'angolo  $\varphi$  col taglio, le linee nere ottenute saranno le isogoniche relative all'angolo  $\alpha = \varphi$ .

Per  $\vartheta = 90^\circ$  la precedente relazione dà il risultato già riferito, che cioè lungo la retta normale alla linea del taglio la lamina è birifrangente, con l'asse diretto a  $45^\circ$  dalla linea medesima.

La (4), per  $A = \text{costante}$ , definisce un sistema di linee lungo le quali la birifrangenza ha lo stesso valore. Ma la discussione di questa complicata equazione non è agevole.

Tutto quanto precede presuppone che siano realizzate le condizioni in cui son valide le formole del Volterra, da cui abbiamo preso le mosse; che perciò il taglio sia molto piccolo, e che le basi siano tenute piane e alla distanza di prima. È chiaro però che osservando la luce nel senso dell'asse  $z$ , come abbiamo ammesso, le forze che devono essere applicate sulle basi per tenerle piane, e alla distanza normale, non avranno grande influenza sugli effetti osservati, specialmente se l'anello si riduce, nel senso  $z$ , a una fetta di piccola altezza.

E in verità l'esperienza ha confermato tutti i particolari sopra previsti, senza che occorresse tenere l'anello tra due laminette di vetro, che ne rendessero assolutamente piane le basi e alla distanza primitiva.

**Fisica.** — *I fenomeni di doppia rifrazione accidentale prodotti dalle tensioni create in un corpo elastico dalle distorsioni di Volterra* (<sup>1</sup>). Nota di G. C. TRABACCHI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Per osservare i fenomeni di doppia rifrazione accidentale prodotti in un anello trasparente dalle distorsioni del Volterra, seguendo la via tracciata dalle notevoli deduzioni del Corbino, serve bene la gelatina, ma è necessario avere delle cure speciali nella preparazione dell'anello e nel modo di sperimentare. Due sono i requisiti a cui deve rispondere il mezzo adoperato: avere le proprietà elastiche ammesse dalla teoria ed una sufficiente trasparenza.

Ripetute esperienze mi hanno condotto ad operare nel modo seguente:

Prendo della gelatina in foglietti della migliore qualità e la immergo in acqua fredda contenente tracce di acido fenico: qui la gelatina si gonfia; dopo circa 10 minuti getto via tutto il liquido rimasto e metto la gelatina che si è rammollita in un recipiente di vetro tenuto a circa 60°, in un bagno d'acqua. Qui la gelatina si scioglie, e quando ciò è avvenuto, la filtro attraverso parecchi strati di garza in un imbuto riscaldato a vapore. Si ha così una gelatina che si rapprende rapidamente e soddisfa sufficientemente alle proprietà richieste: la sua trasparenza permette di leggere comodamente uno stampato bene illuminato anche attraverso uno spessore di cm. 5. Si noti che la presenza di un antisettico, come l'acido fenico, è necessaria, perchè i

(<sup>1</sup>) Lavoro eseguito nel R. Istituto Fisico di Roma.

processi di putrefazione, che si iniziano rapidamente nella gelatina, e che ne mutano completamente le proprietà, sono tra le cause principali degli insuccessi che si possono incontrare in queste esperienze.

Ottenuta la gelatina, preparo delle lastrine di vetro ben pulite e degli anelli di gomma di quelli che si trovano in commercio ad uso di guarnizioni per le condotte d'acqua e di gaz, avendo cura di scegliere quelli che hanno il foro interno perfettamente circolare e cilindrico. Posta su di una

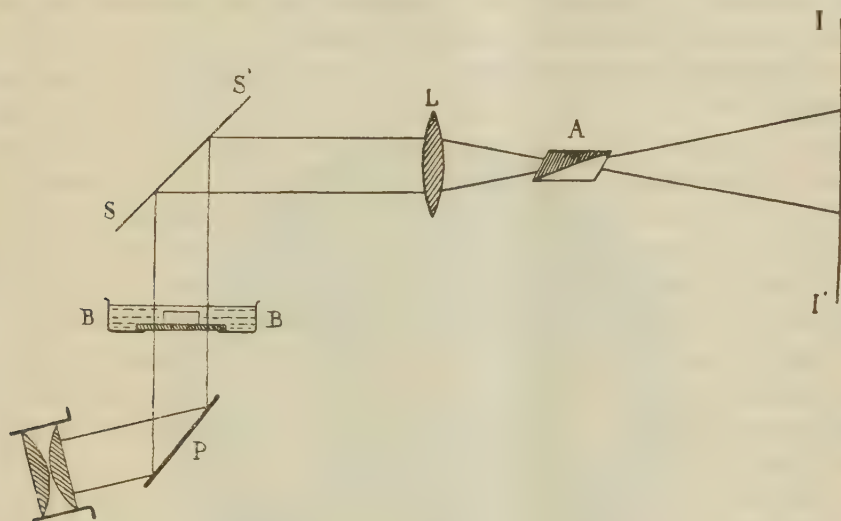


FIG. 1.

lastrina una di queste guarnizioni, il cui diametro interno è di cm. 5 e lo spessore di cm. 0,9, verso la gelatina liquida, curando di evitare la formazione di bolle d'aria fino a che abbia formato un lieve menisco al di sopra della gomma: qui, con una lastra di vetro che appoggio lentamente, cominciando da un lato, scaccio l'eccesso di gelatina: la seconda lastra viene anch'essa a contatto della gomma e quando la gelatina si è rappresa, essa ha sensibilmente la forma di un cilindro limitato da faccie piane. Una leggera trazione fa abbandonare alla gelatina le lastre di vetro.

Tolta la prima lastrina, con un buon foratappi guidato da una sagoma di ottone, pratico un foro centrale che risulta coassiale col cilindro esterno ed il cui diametro determina la  $\epsilon$  delle formule del Corbino; quindi, separata la gelatina dalla gomma, passando tra le due la lama di un bisturi con la parte non tagliente rivolta in avanti, si ha un blocco di gelatina che ha la forma voluta. Non sembrano eccessivi gli scrupoli in tali operazioni: da quanto dirò appresso si vedrà come essi siano indispensabili.

La disposizione da me usata per osservare dal punto di vista ottico le preparazioni (fig. 1) è stata la seguente: un fascio parallelo di luce elettrica



polarizzata mediante uno specchio nero P viene da questo inviata verticalmente, attraversa una bacinella B con il fondo di vetro piano e privo di birifrangenza; è rimandata orizzontalmente da uno specchio bianco SS' ed una lente L proietta il fondo della bacinella su di uno schermo o sul vetro spulito di una macchina fotografica a cui ho tolto l'obbiettivo. Un nicol A posto nel piano focale della lente serve da analizzatore. Questa disposizione permette di osservare ciò che accade in tutta la preparazione, perchè essa viene proiettata ed esaminata nella sua totalità, così che si possono comodamente osservare e fotografare i fenomeni studiati.

La bacinella, B è piena d'acqua ed è indispensabile, perchè comunque si appoggi su di una lastra di vetro un pezzo di gelatina, esso non è mai libero di prendere la forma che compete alle tensioni interne, essendo queste superate dalle forze esterne dovute all'aderenza, fra la gelatina ed il vetro, e nel nostro caso la più lieve perturbazione accidentale è da evitarsi; ciò si realizza bene immergendo la gelatina nell'acqua: in tal caso prevalgono le tensioni studiate dalla teoria e che danno luogo ai fenomeni preveduti dal Corbino. Osservando a nicol incrociati uno dei descritti anelli di gelatina immerso nella bacinella, esso apparisce sensibilmente isotropo, ma l'attitudine alla birifrangenza accidentale è così forte che basta toccarlo leggermente per vedere ricomparire la luce con configurazioni complicatissime. Bisogna perciò sperimentare con molta cura.

Sull'uso dell'immersione della preparazione in un liquido giova osservare che essendo da scartarsi l'uso di insolubilizzatori chimici della gelatina che ne alterano troppo profondamente le proprietà, il preparato si sciupa in breve tempo; così che è necessario osservare presto ciò che si vuol vedere, tanto più che la gelatina, anche se non immersa nell'acqua, non conserva a lungo le tensioni precedentemente create, e le deformazioni cui è assoggettata tendono a divenire permanenti.

Descriviamo ora le varie esperienze:

1° caso. *Tagli radiali.* — Posto il blocco, ancora sostenuto da una delle lastre di vetro che limitano le sue basi e a cui aderisce, su di un cartone che porta tracciato un cerchio uguale al cerchio esterno della preparazione e di più due raggi facenti fra loro un angolo di circa 30°, faccio con un bisturi affilato due tagli secondo questi raggi, che si vedono benissimo attraverso la gelatina a causa della sua trasparenza: è questa la più delicata di tutte le operazioni. Con una spatola di acciaio leggermente riscaldata fondo la superficie dei due tagli; quindi le avvicino, cercando in quest'atto di evitare pressioni radiali che produrrebbero quando la gelatina è rappresa, cosa che accade in pochi istanti, delle tensioni non volute causando delle perturbazioni troppo gravi, specie in vicinanza del taglio.

Appena la saldatura è effettuata, immergo la preparazione nell'acqua della bacinella, avendo cura di farla cadere nella parte centrale, in modo da

essere illuminata nella sua totalità: la fotografia che qui riporto (fig. 2), mostra ciò che si osserva a nicol incrociati. Come si vede, si ha una perfetta conferma della teoria non solo qualitativa, ma anche quantitativa; infatti, se nella formula che dà <sup>(1)</sup> il raggio  $r$  del cerchio nero in funzione dei raggi esterno ed interno dell'anello

$$r = R_1 R_2 \sqrt{\frac{\text{Log } R_1^2 - \text{Log } R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}}$$

sostituiamo ad  $R_1$  ed  $R_2$  rispettivamente 29 e 9 che sono in mm. i valori numerici dei due raggi che facilmente si possono misurare nella figura, si

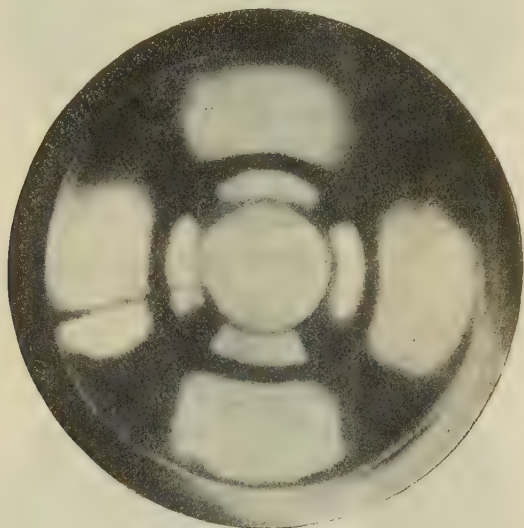


FIG. 2.

trova per la  $r$  il valore 14,5 che coincide sensibilmente col valore del raggio che il cerchio nero ha nella figura stessa.

Di più, girando la preparazione nel proprio piano, non si osserva nessun cambiamento; infatti, nel caso riportato, il taglio sta in una posizione qualunque.

Tagliando nuovamente l'anello dovunque, esso ritorna isotropo, e la luce scompare in tutto il campo.

2° caso. *Tagli paralleli*. — Fatti i tagli e la saldatura con le avvertenze già dette per il precedente caso, si osserva nel solito modo, e si ha:

a) *il taglio è parallelo ad una delle sezioni principali*, la curva prevista dalla teoria ci apparisce quasi perfetta, come si vede dalla fotografia

(<sup>1</sup>) v. Corbino, R. Acc. Lincei, 1909, 1° sem., pag. 440.

(fig. 3), prescindendo dalle anomalie che malgrado le grandi cure si osservano in vicinanza del taglio. Calcolando il valore del raggio vettore  $r$  per i

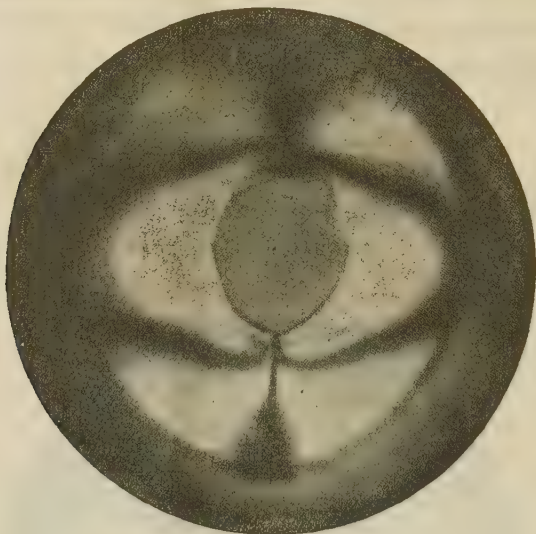


FIG. 3.

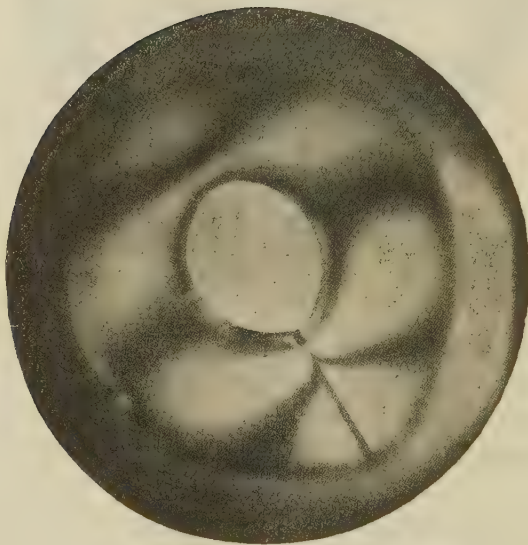


FIG. 4.

varii valori di  $\vartheta$  in base alla formula

$$r^2 = \frac{1 + \varepsilon^2}{2\varepsilon^2} R^2 \left[ \sqrt{\cos^2 2\vartheta + \left(1 + 2 \cos 2\vartheta\right) \frac{4\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2)^2}} - \cos 2\vartheta \right] \quad (1)$$

(1) V. Corbino, id. id., pag. 441.



si ha anche una buona verifica quantitativa: in ogni modo, apparisce a prima vista che il raggio della curva nera per  $\vartheta = 90^\circ$  coincide col raggio del cerchio esterno come vuole la teoria, e ciò è confermato per qualunque valore di  $\varepsilon$ , come risulta da numerose esperienze.

*b) Il taglio è inclinato a  $45^\circ$  sulle sezioni principali.*

Riporto la fotografia della figura che in tal caso si ottiene (fig. 4).

Essa, cenfrontata con quelle precedenti, dimostra l'assenza di linee sprovviste di birifrangenza, poichè i due sistemi di linee hanno solo un numero discreto di punti comuni.

È necessario osservare che ciò che prevede la teoria, specialmente nel caso dei tagli paralleli, si verificherebbe rigorosamente solo se il taglio fosse infinitamente sottile, però perchè la birifrangenza sia visibile è necessario un taglio tale che la simmetria di forma rispetto all'asse  $Y$  viene a mancare, così che quelle curve che la teoria prevede simmetriche rispetto ai due assi, risultano invece un po' deformate rispetto all'asse  $y$ , pure mantenendosi sensibilmente simmetriche rispetto all'asse  $x$ .

**Fisica.** — *Sulle trasformazioni del Selenio.* Nota di A. POCHETTINO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

1. Come è noto il Se amorfo è una sostanza vetrosa, a frattura concoide, di colore nero (rosso-rubino per trasparenza se in lamine molto sottili). Riscaldandolo si osserva che verso i  $60^\circ$  diventa molle, poi ad una temperatura più elevata che, come vedremo in seguito, dipende dalla velocità di riscaldamento, si solidifica nuovamente in una massa cristallina grigio-scura, e finalmente verso  $220^\circ$  fonde <sup>(1)</sup>. Il processo di trasformazione dalla forma vetrosa alla forma cristallina grigio-scura è accompagnato da una rilevante emissione di calore che venne per la prima volta osservata da Hittorf <sup>(2)</sup>, poi da Regnault <sup>(3)</sup>, da Petersen <sup>(4)</sup> ecc. e infine da Marc <sup>(5)</sup>; il diagramma termico di questo processo è simile a quello di un'esplosione, l'emissione di calore è rapidissima e così ne segue un forte aumento nella velocità del processo. Il Marc dimostra però ancora che verso i  $205^\circ$  avviene una seconda trasformazione accompagnata da una nuova emissione di calore; ne segue che la prima forma cristallina grigio-scura  $Se_\alpha$  che si ottiene dal Se amorfo a temperatura più bassa è meno stabile di questa seconda forma  $Se_\beta$ .

<sup>(1)</sup> Saunders, Journ. of phys. chem., 4, pag. 423, 1900.

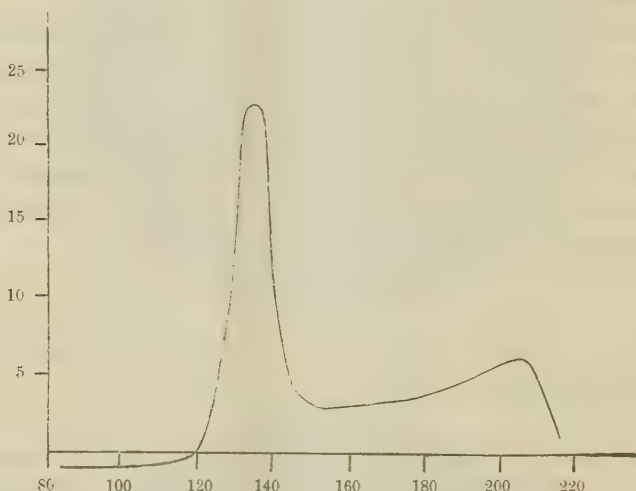
<sup>(2)</sup> Lehmann, Molekular Physik, I, pag. 709, 1888.

<sup>(3)</sup> Ann. de Chim. et Phys., (3), 46, pag. 281, 1856.

<sup>(4)</sup> Zeitschr. phys. Chem., 8, pag. 612.

<sup>(5)</sup> Marc, Die physikalisch-chemischen Eigenschaften des metallischen Selens. Hamburg, L. Voss., 1907.

che si ottiene da essa per una trasformazione monotropa poco prima della fusione. Al contrario del primo, il processo corrispondente a questa seconda trasformazione è molto lento, tanto che, affinchè questa sia completa, occorrono parecchie ore. Studiando l'attendibilità o meno dell'ipotesi del Marc che cioè la forma  $Se_B$  non sia unica, ma debba piuttosto riguardarsi come una soluzione solida di due forme in equilibrio variabile colla temperatura, ho avuto occasione di operare parecchie volte queste trasformazioni del Se e di osservare alcune particolarità sulle quali riferisco nella presente Nota.



2. Il diagramma termico di una trasformazione completa del Se ottenuta per riscaldamento con velocità uniforme può essere rappresentata come nella qui annessa figura riferentesi ad una esperienza su 3 grammi di Se, condotta con una velocità media di riscaldamento di  $7^\circ$  al minuto primo fra  $20^\circ$  e  $220^\circ$ : sulle ascisse sono riportate le temperature del bagno riscaldatore, sulle ordinate le differenze di temperatura fra la massa di Se e il bagno stesso. In esso si notano diversi stadi caratteristici: fino all'inizio della prima trasformazione, la temperatura del Se è più bassa di quella del bagno per la cattiva conducibilità termica del Se amorfo; compiuta la prima trasformazione la temperatura del Se rimane superiore a quella del bagno finchè non si nota il riscaldamento dovuto alla seconda trasformazione, poi tende a ritornare eguale a quella del bagno fino alla fusione. La temperatura alla quale si ha la massima differenza di temperatura fra Se e bagno nella prima trasformazione dipende dalla velocità di riscaldamento.

Il metodo seguito per studiare questo fenomeno è il solito: in un massello di rame sono praticati tre fori cilindrici, in uno è contenuto il bulbo di un buon termometro da  $0^\circ$  a  $360^\circ$  diviso in gradi, negli altri due sono collocate due provette di vetro identiche; in una di queste è contenuto il

campione di Se da studiare (sempre del peso di 3 grammi), nel quale è immersa, protetta da un sottilissimo tubo di vetro, una delle due saldature di una coppia termoelettrica rame-argentana; nell'altra provetta è contenuta la seconda saldatura della coppia protetta allo stesso modo. Il massello di rame è immerso in un bagno di sabbia di cui si può a volontà variare il volume a seconda della velocità di riscaldamento che si desidera raggiungere. Il risultato di 52 serie di osservazioni è contenuto nel seguente tabelino, ove in prima riga è riportata la velocità media di riscaldamento fra 20° e 220° in gradi al minuto primo, e nella seconda la temperatura del bagno corrispondentemente alla quale venne notato il massimo della differenza di temperatura fra Se e il bagno stesso:

0,5-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-10	10-12	12-14	14-18	18-22
101	115	122	127	132	136	140	143	148	155	160	167	175

La prima trasformazione del Se non avviene dunque a temperatura fissa, ma variabile colla velocità di riscaldamento e precisamente tanto più alta quanto maggiore è questa velocità. Ciò spiega la diversità delle temperature assegnate a questa trasformazione dagli autori sopra ricordati.

3. Nessuna regolarità potei accertare nella velocità colla quale si svolge l'emissione di calore; talvolta lo svolgimento avviene più bruscamente, talvolta meno; circa la differenza massima di temperatura fra Se e bagno ho potuto notare che in generale essa è maggiore corrispondentemente ad una velocità di riscaldamento maggiore, ma senza alcuna traccia della regolarità che si nota invece nell'andamento della temperatura a cui detto massimo si verifica colla velocità di riscaldamento. La temperatura corrispondente alla massima differenza di temperatura che si stabilisce fra Se e bagno nella seconda trasformazione è invece assolutamente indipendente dalla velocità di riscaldamento: dalla media di tutte le osservazioni fatte risulterebbe di circa 204-206° senza che le piccole variazioni osservate possano ascriversi ad altro che alle incertezze dell'osservazione trattandosi di una elevazione di temperatura molto minore della precedente e per giunta verificantesi quando il Se va raffreddandosi. Il Mare dice che è possibile far avvenire il riscaldamento così rapidamente che la forma labile  $Se_A$  fonda prima di avere avuto il tempo di passare nella forma più stabile  $Se_B$  e sembra ammettere che ciò possa avvenire per una velocità di circa 5° al 1<sup>m</sup>. Io ho potuto invece accertare il verificarsi di questa seconda trasformazione anche per velocità di 18° al 1<sup>m</sup>, nel diagramma termico non si nota allora un vero e proprio massimo, ma un netto ritardo nella discesa della curva, ritardo che si verifica sempre in corrispondenza della temperatura 204-206°.



4. Se si riscalda il Se fino a  $210^{\circ}$  circa avendo cura di non sorpassare la temperatura di fusione e poi lo si lascia raffreddare, non si nota nulla di anormale per tutta la durata del raffreddamento qualunque sia la velocità con cui esso si compie; riscaldando di nuovo si rileva dapprima la scomparsa del primo massimo di temperatura del Se e poi la persistenza del secondo accennante questa al fatto che la seconda trasformazione non è stata completa; questa persistenza dura anche dopo parecchi cicli di riscaldamento e raffreddamenti successivi confermando così il fatto già osservato dal Marc cioè la lentezza colla quale avviene questa seconda trasformazione. Se al contrario nel primo riscaldamento si sorpassa la temperatura di fusione allora, comunque veloce sia il raffreddamento, purchè il Se non rimanga per più di mezz'ora al di sopra di  $205^{\circ}$ , riscaldando nuovamente si ritorna ad osservare il compiersi di ambedue i processi di trasformazione; se invece fra i  $230^{\circ}$  e i  $200^{\circ}$  il raffreddamento non è avvenuto con conveniente rapidità, nel riscaldamento successivo si nota la scomparsa della prima trasformazione.

Osservando il raffreddamento di una massa di Se portata ad una temperatura superiore a quella della fusione non si nota per tutto l'intervallo di temperatura fra i  $123^{\circ}$  e i  $125^{\circ}$  alcuno di quei fenomeni che avvengono in corrispondenza di un cambiamento di stato. Ad una temperatura oscillante fra i  $123^{\circ}$  e i  $125^{\circ}$ , comunque avvenga il raffreddamento, si ha un rallentamento marcato nell'andamento decrescente della temperatura del Se. Questa emissione di calore durante il raffreddamento venne già osservata da Regnault a  $121,3$ ; 19 serie di misure, effettuate su Se purissimo cristallizzato, diedero invece a me, come ho detto, delle temperature oscillanti fra  $123^{\circ}$  e  $125^{\circ}$ . È da notare che a  $123^{\circ}$  il Se non è ancora solido e presenta ancora una certa pastosità, se quindi si può fissare pel Se una temperatura di fusione non si può fissare una temperatura di solidificazione.

Il fatto su ricordato e la lentezza con cui avviene la seconda trasformazione nel riscaldamento del Se amorfo starebbero in appoggio all'ipotesi del Marc, secondo il quale nelle cellule fotosensibili a Se preparate al solito modo non si avrebbe a che fare con una forma unica di Se, ma con una soluzione solida di almeno due forme in equilibrio variabile colla temperatura.

5. Ho voluto anche vedere cosa avviene se si porta il Se fino ad una temperatura un po' inferiore a quella corrispondente alla prima trasformazione, ve lo si mantiene per un certo tempo e quindi si prosegue nel riscaldamento. Il risultato concorde di tutte le serie ottenute fu che al di sotto di  $90^{\circ}$  comunque duri il riscaldamento il primo massimo nella differenza di temperatura fra Se e bagno si verifica sempre; se si porta il Se ad una temperatura più elevata di  $90^{\circ}$  e poi ve lo si mantiene per un tempo conveniente questo primo massimo *non si verifica più*: per esempio se si man-

tiene per 30' a 98°, oppure per 20' a 100°; quando questo primo massimo si presenta il suo valore non dipende dalla temperatura e dalla durata del riscaldamento preventivo, ma solo dalla rapidità con cui il Se fu portato dalla temperatura ambiente a quella del riscaldamento e poi da questa a 200°. Il secondo massimo invece si verifica sempre e costantemente a temperature intorno ai 205°. La prima trasformazione dunque in certi casi o non avviene o avviene in un modo diverso dal solito, mentre la seconda conserva sempre le sue modalità e la sua temperatura caratteristica.

6. Le esperienze di cui ho fin qui parlato vennero effettuate con tre campioni diversi di Se e precisamente: Se puro in stanghette di Schuchardt, Se purissimo in granuli di Merck, e finalmente Se purissimo cristallizzato pure di Schuchardt; i risultati riguardanti le temperature di trasformazione sono entro gli errori di osservazione molto concordanti, ho potuto solo rilevare che le quantità di calore svolte in ambedue le trasformazioni sono un po' maggiori pel Se purissimo cristallizzato e un po' minori pel Se puro in stanghette. Ad ogni modo, ho cercato se la presenza di sostanze estranee sposta le temperature alle quali sogliono manifestarsi i due massimi di differenza di temperatura fra Se e bagno. I risultati furono i seguenti:

50 parti di Se + 1 parte di C			10 parti di Se + 1 parte Zn		
Velocità di riscaldamento in gradi al 1 <sup>m</sup>	Temperatura a cui compaiono		Velocità di riscaldamento in gradi al 1 <sup>m</sup>	Temperatura a cui compaiono	
	I Mass.	II Mass.		I Mass.	II Mass.
1,3	122	205	3,3	122	203
5,8	135	203	3,4	123	206
7,3	143	205	4,3	129	205
8,1	150	205	5,8	136	204
10 parti di Se + 1 parte di C			6,5	141	206
6,5	137	206	8	146	204
11,8	157	205	8,9	146	207

Se si confrontano questi numeri con quanto è riportato più su si rileva come la presenza di una sostanza estranea non sposti sensibilmente le temperature alle quali avvengono le due trasformazioni. Se si indaga però la durata della seconda trasformazione si trova che questa è molto più lunga quando sia presente una sostanza estranea, fatto questo già riscontrato dal Marc.

7. Se si fonde un granulo di Se su una lastra di vetro e poi si spalma il Se fuso su di essa con un bastoncino pure di vetro portato a poco più di 220°, si può riuscire ad ottenere uno strato di selenio trasparente con una bella colorazione rosso-rubino, più o meno densa a seconda dello spessore, che non deve superare in ogni modo il decimo di millimetro onde avere

una discreta trasparenza. Fra diversi preparati di Se ottenuti in tal guisa ne scelsi di quelli che esaminati per trasparenza presentano una buona uniformità di spessore per studiare al microscopio il comportamento al crescere della temperatura. Alla temperatura ordinaria molti di questi strati di Se, esaminati con un ingrandimento di circa 70 volte si mostrarono cosparsi di piccole masse nere del diametro di circa  $\frac{1}{100}$  di mm., a contorni non ben definiti, di spessore leggermente maggiore che non il resto dello strato e sulla cui natura non ho potuto sincerarmi. Per l'esame venne quindi scelta una porzione dello strato non presentante traccia di queste eterogeneità. Riscaldando con una fiamma l'orlo di una lastra di rame molto più lunga del tavolino del microscopio, sovrapposta allo strato di Se, portante un piccolo forellino in corrispondenza all'obbiettivo, si poteva a piacere elevare la temperatura del Se e questa veniva determinata con un termometro col bulbo posto in immediata vicinanza del foro di osservazione.

Fino ad una temperatura di circa  $60^{\circ}$  la lastra di Se conserva la sua trasparenza omogenea e il suo colore rosso-rubino; verso questa temperatura comincia a comparire come un reticolato di piccole fibre di colore nero, sparse abbastanza uniformemente, ma senza alcuna regolarità geometrica; queste fibre hanno un diametro di circa un micron. Man mano questo reticolato va infittendosi dapprima pel crescere del numero delle fibre, poi, verso circa i  $100^{\circ}$ , anche per l'aumento del loro diametro; più tardi cominciano a comparire sulla superficie dello strato delle rugosità arrotondate (di cui ci si accorge per la luce riflessa lateralmente) che vanno man mano estendendosi. L'opacità completa non si raggiunge che a quella temperatura alla quale, tenuto conto della velocità di riscaldamento, deve avvenire la prima trasformazione del Se di cui si è parlato. È notevole il fatto che questa opacità si produce gradatamente e non così rapidamente come avviene l'emissione di calore e ciò sebbene ambedue i fenomeni corrispondano indubbiamente alla trasformazione del Se amorfo in  $Se_A$ .

8. La resistenza elettrica di uno strato di Se amorfo trasparente è praticamente infinita, ma quando la temperatura si eleva la resistenza assume valori determinabili: ho sperimentato su dei campioni di Se trasparente, muniti di elettrodi di stagnola accuratamente compressa in modo da garantire il contatto anche a temperature elevate; le cellule così formate venivano chiuse in un recipiente metallico immerso in un bagno di sabbia e munito di un termometro il cui bulbo veniva a trovarsi a  $\frac{1}{2}$  millimetro di distanza dalla superficie del Se; esse erano inserite in un circuito comprendente da uno a tre accumulatori, un interruttore e un galvanometro del tipo Thomson, costruito da Carpentier, della resistenza di 16300 Ohm, la cui sensibilità nelle condizioni in cui venne usato risultò essere di  $5 \times 10^{-10}$ . Dalle deviazioni del galvanometro si poteva quindi dedurre l'ordine di grandezza della resistenza elettrica dello strato di Se.



Ecco a titolo di esempio i valori di questa resistenza  $R$  al variare della temperatura  $t$  per una lastrina di Se amorfo su vetro delle dimensioni: 5 mm di lunghezza (nel senso cioè della corrente), 2 cm. di larghezza e  $\frac{1}{20}$  di mm. di spessore, lastrina che potè essere portata fino a  $200^\circ$  senza che si scerepolasse ( $R$  è espressa in megaohm):

$t$	$R$	$t$	$R$	$t$	$R$	$t$	$R$	$t$	$R$	$t$	$R$	$t$	$R$	$t$	$R$
80	$\infty$	108	400	119	72	142	32	152	28	165	28	180	24	190	13
90	$\infty$	111	200	123	40	146	27	156	27	170	28	181	21	197	8
100	$\infty$	117	95	133	39	150	27	159	27	176	26	183	19	201	5

La velocità del riscaldamento fu di circa  $4^\circ,5$  al minuto primo.

Si vede così che il presentarsi di una conducibilità apprezzabile comincia gradatamente un po' prima della temperatura alla quale si ha la massima differenza di temperatura fra Se e bagno; in corrispondenza all'infittire delle fibrille nere che determinano l'opacità del preparato la resistenza va gradatamente diminuendo; poi per un certo tempo si mantiene costante sensibilmente, forse perchè il coefficiente termico del Se conduttore che va formandosi è in tali condizioni positivo; poi ricomincia a diminuire, ma più lentamente di prima. Al di sopra di  $200^\circ$  è impossibile ottenere che la lastrina di Se non presenti soluzioni di continuità.

Quest'andamento sembrerebbe appoggiare l'ipotesi del Lehmann il quale ammette pel Se due forme cristalline grigie di diversa conduttività elettrica, delle quali la prima a formarsi sarebbe quella relativamente più conduttrice e corrisponderebbe alla prima delle trasformazioni ricordate, l'altra meno buona conduttrice si formerebbe poco sopra i  $200^\circ$ .

**Fisica.** — *Sui campioni di autoinduzione toroidali, e sul loro profilo di minima resistenza.* Nota del dott. P. BARRECA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

# I.

Scopo della presente Nota è di proporre l'uso di cassette di autoinduzione cioè di collezioni campionate di autoinduttori dei quali mediante caviglie se ne possano mettere in circuito quanti si vogliano. Se si disponessero in serie campioni del tipo fino adesso adoperato (bobine cilindriche senza ferro a gola quadrata), l'uso pratico della cassetta sarebbe pressocchè impossibile a causa della complicazione dovuta alle numerose induzioni mutue; con sole 6 spine estratte, si avrebbero ad esempio 21 termini da sommare per conoscere il valore della a. i. direttamente inserita. Inoltre le bobine con caviglia non estratta si comporterebbe come secondarî corto-circuitati di tra-

sformatore cioè reagirebbero dannosamente sulle bobine utilizzate; a questo ultimo inconveniente si potrebbe però ovviare facilmente.

Elimineremo le mutue induzioni usando autoinduttori toroidali. Conserveremo invariata la resistenza ohmica al variare dell'a. i. mediante oppor-

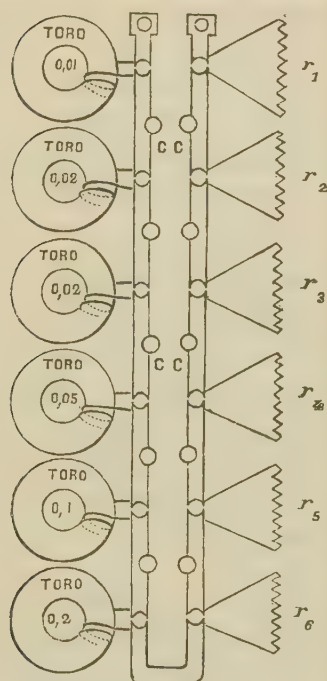


FIG. 1.

tuno dispositivo e ad esempio quello della fig. 1; le caviglie collocate in uno solo dei due fori che stanno di fronte (destro o sinistro) sostituiranno ad ogni toro una resistenza bifilare  $r$  uguale (per costruzione) alla resistenza del primo.

Le coppie di serrafili intermedi CC permetteranno di utilizzare eventualmente solo una parte della cassetta, diminuendo la res. ohmica costante complessiva. L'istrumento servirà per frequenze ordinarie industriali e telefoniche e per coefficienti di media grandezza (da millihenry a qualche henry). Gli avvolgimenti saranno in costantana o manganina ed i nuclei dei tori in serpentino o meglio in mogano perchè siano interamente esenti da probabili tracce di ferro e riescano più leggeri. Questi avranno superficie non levigata affinchè il filo metallico (rivestito) mantenga la propria posizione aiutato da immersione in lacca o paraffina. Sarà diffi-

cile ottenere mediante aggiustaggi che il coefficiente di ogni singolo toro sia espresso da un numero a unica cifra significativa; ci contenteremo di incidere sul coperchio il suo valore esatto (non molto diverso da quello perchè potranno predeterminarsi le dimensioni del toro ed il numero conveniente di spire prima della taratura definitiva).

Infine il toro potrebbe essere profilato secondo una curva speciale di minima resistenza di cui qui appresso; ma per lo più la diminuzione di resistenza ohmica che così si ottiene non è (come risulterà da un es.) notevole in confronto al profilo circolare ed a quello formato da un rettangolo sormontato da due semicerchi (colle basi normali all'asse del toro), questo ultimo quando non si vuole eccedere nelle dimensioni esterne.

## II.

### *Ricerca del profilo ottimo della sezione.*

Supposto di fissare a criterio il diametro interno e l'esterno di un toro da costruire e supposto di volere impiegare in ogni spira una certa lunghezza

di filo metallico di una certa qualità, non è naturalmente indifferente adottare per la spira una piuttosto che un'altra forma geometrica.

Vi sarà tra tutte una forma ottima che darà la massima autoinduzione oppure (se così vuolsi) che per data autoinduzione avrà la minima resistenza ohmica e perciò (senza accrescere lo spessore del filo) renderà i metodi di misura più sensibili. Cerchiamo tale curva.

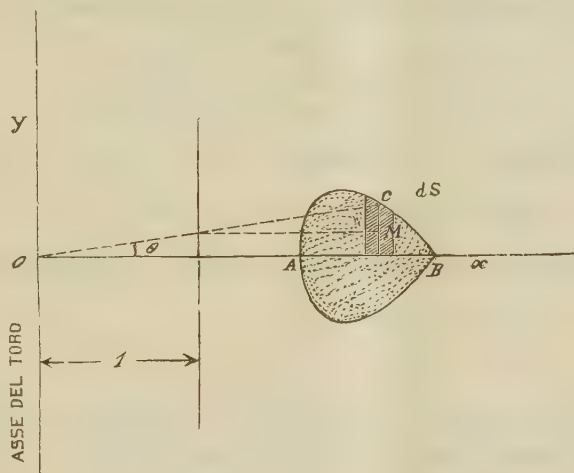


FIG. 2.

Il reciproco della riluttanza del nucleo deve essere massimo; esso vale coi simboli della fig. 2:

$$\int \frac{dS}{2\pi x} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{y}{x} dx = \frac{1}{2\pi} \int \tan \theta \cdot dx$$

calcolando l'integrale lungo tutto il contorno. Il coefficiente di a. i. sarebbe poi  $2n^2 \int \tan \theta \, dx$  se  $n$  sono le spire dell'avvolgimento <sup>(1)</sup>.

Portando il punto A a coincidere con O, si scorge che (per qualunque profilo avente ivi, lungo un certo tratto, ordinate non nulle) il toro diverrebbe infinitamente vantaggioso ed il problema proposto cesserebbe di aver senso. D'altra parte tale caso non presenta interesse perchè se A è troppo vicino ad O la periferia interna del toro diventa troppo più corta dell'esterna e non potranno alloggiarsi che poche spire nonostante lo sviluppo delle sue dimensioni esterne.

<sup>(1)</sup> Questo offre una valutazione grafica dell'a. i. dei tori a sezione data qualsiasi. Si proiettino tutti i punti C del contorno dal centro O del toro e poi le intersezioni del fascio proiettante con la verticale di ascissa 1 si proiettino orizzontalmente in M sulle rispettive ordinate. Si planimetri l'area racchiusa dai punti M e la si moltiplichi per  $2n^2$ : il coeff. risulterà in cm. se l'area fu misurata in cm<sup>2</sup> e se la distanza unitaria era 1 cm.



Supponiamo dunque dato (scelto a criterio) anche OA e così il problema diviene:

*Dati i punti O, A, B, ed una lunghezza l di filo colla quale si vuole fare il contorno, trovare la forma della curva che rende massimo*  
 $\int_A^B \operatorname{tang} \theta \, dx.$

Si tratta di trovare la funzione  $y$  di  $x$  che rende nulla la variazione:

$$\delta \int_A^B \frac{y}{x} \, dx + \lambda \delta \int_A^B \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

dove il secondo integrale è la semilunghezza  $l$  e dove  $\lambda$  rappresenta una costante da valutare in seguito. Questo ove si ponga:  $f = \frac{y}{x} + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$  si ottiene secondo il Calcolo delle variazioni col soddisfare alla equazione indefinita:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''} - \dots = 0$$

ed alla equazione ai limiti, la quale però nel nostro caso svanisce perchè i primi suoi due termini (quelli in  $\delta x$  e  $\delta y$ ) sono nulli nei punti A e B che il problema suppone fissi e perchè gli altri termini (quelli in  $\delta y'$ ,  $\delta y''$ , ...) hanno coefficienti nulli non contenendo la  $f$  derivate superiori a  $y'$ . Nel nostro caso l'equazione indefinita diviene:

$$\frac{1}{x} = \frac{d}{dx} \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

cioè:

$$(1) \quad \log x - \log K = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

dove  $-\log K$  è una costante arbitraria positiva o negativa. Di qui:

$$y = \int \frac{\log \frac{x}{K}}{\sqrt{\lambda^2 - \log^2 \frac{x}{K}}} \, dx + C$$

e rimarranno da fissare le tre costanti  $K, \lambda, C$ ; cerchiamone il significato e facciamo qualche altra considerazione. Per brevità, chiamiamo verticali le parallele all'asse del toro.

L'espressione dopo il segno integrale si annulla solamente per  $x = K$  e perciò  $K$  è l'unica ascissa per cui la tangente al profilo sia orizzontale; è positiva come ogni  $x$ . La medesima espressione diviene infinita per le ascisse  $Ke^{+\lambda}$ ,  $Ke^{-\lambda}$  e solo per esse; ivi la tangente è verticale e detta  $\alpha$  la

più piccola di esse e  $b$  l'altra sarà  $b = \frac{K^2}{a}$  e risulta  $\lambda = \pm \log \frac{a}{K} = \pm \log \sqrt{\frac{a}{b}}$ ,  $K = \sqrt{ab}$ .

Inoltre, per il radicale possiamo prendere nell'integrazione o costantemente il segno più oppure il meno e perciò per ogni  $x$  vi sono due  $y$  uguali ed opposte; esse sono coincidenti là dove il radicale è nullo cioè per le due tangenti verticali considerate. La curva dunque tocca queste ultime e si ripiega con simmetria rispetto all'asse delle  $x$ . Per ogni  $x$  esterno alla coppia di valori  $a$  e  $b$  l'integrale diviene immaginario, sicchè la curva non ha punti (reali) al di fuori della striscia di piano tra le dette due tangenti.

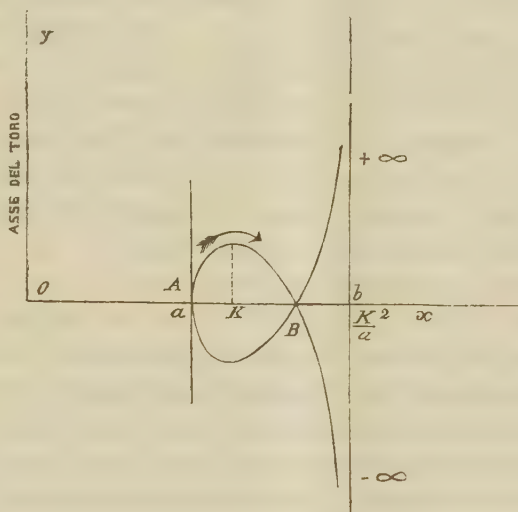


FIG. 3.

Ne segue che  $a$  è il diametro interno del toro (se non si adotta un artificio di cui più sotto). La fig. 3 rappresenta una curva soddisfacente a quanto sopra e copiata da altre che ho costruito effettivamente come è detto in appresso.

Inoltre la proprietà delle due ascisse  $a$  e  $b$  di avere per prodotto  $K^2$  è un caso di una più generale, perchè ad ogni coppia di ascisse che ha per prodotto  $K^2$  corrispondono tangenti simmetricamente inclinate rispetto agli assi coordinati.

Abbandoniamo la curva completa simmetrica rispetto all'asse delle  $x$  che per noi è superflua e prendiamo per il radicale il solo segno positivo. Nella metà curva che così riteniamo, quando facciamo crescere  $x$  a partire dal valore  $a$  per eseguire l'integrazione e calcolare la  $y$  veniamo a percorrere la curva nel senso della freccia, e perciò rispetto all'asse delle  $x$  la tangente avrà un seno direttore  $\sin \alpha$  che tra  $a$  e  $K$  sarà positivo, e da  $K$

in poi negativo. Ora, siccome la equazione (1) equivale a:

$$\log \frac{x}{K} = \lambda \sin \alpha$$

così adesso  $\lambda$  è sempre negativo e occorre scrivere semplicemente:

$$\lambda = \log \frac{a}{K} = \log \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Infine la qualità di ottimo profilo è goduta dalla curva in ogni sua parte, vale a dire che se per alcuni dati del problema abbiamo ottenuto una curva e di questa stacciamo una porzione con estremi arbitrari MN e lunghezza arbitraria  $l_1$ , questa rappresenta la soluzione del problema analogo quando i dati diventino M, N ed  $l_1$ . Congiungendo M ad N con una linea fissa arbitraria, avremo la migliore sezione di toro quando useremo, per chiudere il contorno, la curva MN ottenuta. Infatti, se fosse possibile di migliorare il segmento MN resterebbe migliorata tutta la curva primitiva.

Pel nostro scopo potremo dunque tracciare una volta tanto tutte le infinite curve che si ottengono variando i parametri indipendenti  $a$  e  $b$  (la C è semplicemente additiva alle ordinate) e con ciò esauriremo le possibili curve. Anzi converrà costruire solamente le curve  $a = 1$  e per tutti i valori di  $b$ ; giacchè le altre si otterranno da esse per semplice similitudine geometrica. Poscia taglieremo una qualche curva scelta tra esse con una orizzontale che la incontri in due punti e la ripeteremo simmetricamente intorno a questa, ottenendo un contorno ottimo completo di toro.

Se questa orizzontale passerà al disotto del punto A nel quale tutte le dette curve si arrestano, il contorno rimarrà aperto da quel lato, ma lo completeremo con un segmento di retta verticale la quale ci darà la massima a. i. possibile senza scendere al disotto del diametro interno prefisso del toro.

### III.

#### *Costruzione pratica del profilo ottimo.*

Prendiamo adesso come dati del problema  $a, b, C$ . Da essi troviamo facilmente K e  $\lambda$  e poichè l'espressione di  $y$  è adesso divenuta:

$$(2) \quad y = \int_a^x \frac{\log \frac{x}{K}}{+ \sqrt{\log^2 \frac{a}{K} - \log^2 \frac{x}{K}}} dx + C$$

ponendo  $\frac{\log \frac{x}{K}}{\lambda} = z$  e poscia  $\sqrt{1 - z^2} = u$ , otteniamo:

$$y = -\lambda K \int_0^u e^{\sqrt{1-u^2}} du + C.$$



Sviluppando l'esponenziale secondo le potenze di  $\lambda\sqrt{1-u^2}$ , si ottiene:

$$(3) \quad -\frac{y-C}{\lambda K} = \int_0^u du + \lambda \int_0^u \sqrt{1-u^2} du + \frac{\lambda^2}{2!} \int_0^u (1-u^2)^2 du + \dots$$

di cui per semplicità non eseguiamo gli integrali che possono trovarsi facilmente, sicchè  $y$  resta sviluppato in serie.

È forse preferibile e più rapido costruire graficamente la curva con metodi approssimati analoghi alla integrazione grafica. Segnata la curva logaritmica coll'aiuto di tavole a 3 o 4 decimali (sufficienti) dei logaritmi naturali, si tiri l'orizzontale che equidista dai punti di tale curva che hanno come ascisse  $a$  e  $b$ , poi si segni sull'orlo di una squadretta da disegno, fra due tacche, tale equidistanza.

Se adesso per una qualunque ascissa  $x$  appoggiamo una delle tacche sul corrispondente punto della logaritmica e l'altra sulla orizzontale anzidetta avremo la direzione dell'elemento di curva.

Infatti, l'equazione (2) dice:

$$y' = \text{tang arc sen } \frac{\log \frac{x}{K}}{\log \frac{a}{K}}.$$

Ciò posto, basta dividere il piano in tante striscie di larghezza sufficientemente piccola  $\Delta x$  parallele all'asse delle ordinate, numerarle e tirare le loro ordinate medie. Queste colla costruzione sopra indicata ci daranno, con approssimazione sufficiente, la direzione dell'elemento di curva compreso nella striscia. Si tirerà allora entro la prima striscia la parallela al primo elemento e dall'estremo di questo la parallela entro la seconda striscia al secondo elemento. ecc. Si otterrà così la curva cercata; gioverà cominciare dal mezzo.

Ad alcuni mm. di distanza dalle due tangenti verticali il tracciato perde la sufficiente precisione e pertanto il punto A d'incontro colla verticale più interna, non può determinarsi con sufficiente esattezza. Lo otterremo calcolando la differenza  $y_K - C$  tra la sua ordinata  $C$  e quella  $y_K$  del vertice della curva.

La (3) quando  $x$  varia da  $a=1$  a  $K=\sqrt{b}$  acquista per limiti degli integrali 0 ed 1 sicchè (non considerando per un momento i fattori  $\frac{\lambda^m}{m!}$ ) ha integrali definiti di tre specie: Il primo che vale 1. Quelli di posto pari cioè contenenti potenze veramente fratte di  $(1-u^2)$  e pei quali vale la formula:

$$\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n}{2}} du = \frac{1.3.5.7 \dots (n-2)n}{2.4.6.8 \dots (n-1)(n+1)} \frac{\pi}{2}, \quad n \text{ dispari.}$$

Quelli di posto dispari con irrazionalità apparente, del tipo:

$$\int_0^1 (1-u^2)^n du, \quad n \text{ intero}$$

i quali danno tante frazioni che valgono in grandezza e segno i coefficienti dello sviluppo binomiale ma moltiplicati per  $\frac{1}{m+1}$  se  $m$  è il grado che

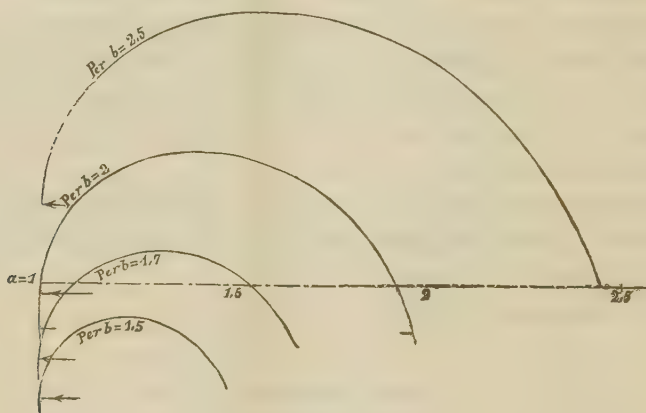


FIG. 4.

nel relativo termine avrebbe avuto la  $u$ . Avremo dunque:

$$-\frac{y_K - C}{K} = \lambda + \frac{\lambda^3}{2!} \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{\lambda^5}{4!} \left(1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right) + \frac{\lambda^7}{6!} \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots$$

$$+ \frac{\pi}{2} \lambda \left\{ \frac{\lambda}{1!} \frac{1}{2} + \frac{\lambda^3}{3!} \frac{1.3}{2.4} + \frac{\lambda^5}{5!} \frac{1.3.5}{2.4.6} + \frac{\lambda^7}{7!} \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + \dots \right\}$$

convergente abbastanza, dove  $\lambda = -\frac{1}{2} \log b$  è sempre negativo ed il più delle volte minore di uno in valore assoluto; si può misurarlo sulla  $\infty$  quadretta sulla quale era stato segnato o meglio calcolarlo. Pei calcoli ordinari:

$$-\frac{y_K - C}{K} = \lambda + 0,7854 \lambda^2 + 0,3333 \lambda^3 + 0,0982 \lambda^4 + 0,0222 \lambda^5 + \dots$$

La fig. 4 contiene alcune curve così costruite. Se si paragona in ciascuna un pezzo (preso opportunamente) col semicerchio di uguale lunghezza e medesimi estremi, si trova che i due coefficienti di a. i. differiscono di poco (3 % circa nella curva più grande e meno nelle altre). Siccome conviene (dopo aver fissato il raggio interno ed esterno del toro) scegliere una lunghezza di semispira uguale o superiore a quella del relativo semicerchio, così in pratica, per amore di semplicità si potrà profilare secondo semicerchi e rettangoli sormontati da due semicerchi. Le piccole frecce indicano i punti in cui cominciano i tratti rettilinei.

Fisica. — *L'arco voltaico nella sua fase iniziale*. Nota di A. OCCHIALINI, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

Fisica. — *L'adescamento dell'arco voltaico*. Nota di A. OCCHIALINI, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

Fisica. — *Sul potere emissivo dei corpi neri*. Nota del dott. VIRGILIO POLARA, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

Meteorologia. — *Andamento diurno della temperatura dell'aria alla Capanna Margherita e ad Alagna*. Nota dei dottori C. ALESSANDRI e F. EREDIA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Selenio e iodio*. Nota di GIOVANNI PELLINI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Nello scorso anno io ho pubblicato in questi Rendiconti <sup>(1)</sup>, assieme col sig. Pedrina, i risultati di una ricerca da noi eseguita sul comportamento delle miscele di iodio e di selenio. Poichè nella letteratura si trovavano indicati composti dei due suddetti elementi, la cui esistenza non sembrava però ben provata, io volli applicare alla soluzione di questo problema i metodi della analisi termica in oggi tanto usata, e consistenti nell'esame delle curve di congelamento e delle curve di raffreddamento delle singole miscele.

Come risultato si ottenne che i punti di solidificazione costituiscono due soli rami discendenti dai punti di fusione dei due elementi, che si incontrano in un punto eutectico. Parimenti, nelle curve di raffreddamento delle singole miscele non si poté osservare che l'inizio del congelamento e l'arresto alla temperatura eutectica. Questo comportamento, come è ben noto e come è indicato in tutti i trattati, sia generali, sia speciali, corrisponde al caso che i due corpi non formino, nè composti, nè cristalli misti. Conclusioni simili furono tratte, in simili casi dai numerosissimi autori, che qui sarebbe

(<sup>1</sup>) Questi Rend., [5], 17, II, 78, (1908).



troppo lungo enumerare. che compirò tali ricerche, sia su metalli, o su sali fusi, o su sostanze organiche. E tale conclusione tirai naturalmente anch'io, nè alcun'altra sarebbe stata possibile.

Questa conclusione venne recentemente criticata dal prof. E. Paternò in questi stessi Rendiconti <sup>(1)</sup>, il che mi obbliga a rispondergli assai brevemente.

Il prof. Paternò dice: « Le mie osservazioni non avevano dunque altro « scopo se non quello di far vedere che dalla crioscopia non deve pretendersi « più di quanto essa possa dare: e che un indirizzo diverso non sia scevro « di pericolo, è confermato da due comunicazioni fatte alla nostra Accademia « nel luglio e nell'ottobre ultimi ».

« Nella prima, Pellini e Pedrina, determinando le curve di fusione e di « solidificazione delle miscele di selenio e sodio, hanno conchiuso che il selenio « e lo iodio non formano nessun composto fra loro, mentre che dal diagramma « da essi ottenuto risulta soltanto provato che il composto si decompone anche « prima di raggiungere la temperatura dell'entetico ».

Chi legge il mio lavoro potrà facilmente vedere che io non ho seguito indirizzo diverso da quello che diecine di sperimentatori seguono oggigiorno, come può persuadersi chi solo scorra p. es. i fascicoli della Zeitschrift f. anorg. Chemie; nè so capire perchè il prof. Paternò abbia rivolto le sue critiche solo al mio lavoro, che fra altro esce dal campo della crioscopia propriamente detta, di cui egli stava occupandosi.

Egli potrebbe aver ragione soltanto se io dalle mie esperienze avessi preteso di escludere, in via generale ed assoluta, la esistenza di composti di selenio e iodio.

È ben noto che tale esclusione assoluta non è possibile <sup>(2)</sup>, e di ciò io era perfettamente conscio, tantochè nella nota con Pedrina è detto esplicitamente: « Con ciò non si esclude che, in linea generale, possano esistere composti fra « iodio e selenio, quando ci si ponga in condizioni sperimentali diverse dalle « nostre ». Dato ciò, mi pare che la osservazione del prof. Paternò non abbia alcuna ragione di essere.

Poichè le parole del prof. Paternò hanno certamente oltrepassato il suo pensiero, quando egli dice che le nostre esperienze provano solo che *il* composto si decompone ecc. Infatti, dell'esistenza di un composto non vi ha il minimo indizio; solo è possibile, come sempre in simili casi, la riserva generale suindicata: ma quella l'avevo già fatta io. Si noti del resto che nel caso speciale i composti problematici di selenio e iodio sarebbero stati preparati per fusione dei componenti e cioè in condizioni analoghe a quelle nelle quali io operavo.

<sup>(1)</sup> Questi Rend., [5], 17, II, 627, (1908).

<sup>(2)</sup> Vedi, p. es., G. Bruni, *Feste Lösungen und Isomorphismus*, Leipzig, 1908, nota 78, pag. 126.

Del resto io debbo credere che l'osservazione del prof. Paternò non sia che formale: perchè in altro punto della sua Nota mostra in effetto di credere alle mie conclusioni, quando criticando un lavoro di Olivari (<sup>1</sup>), che deduce dal comportamento del selenio nel solvente iodio, avere il selenio molecola biatomica, dice: « Se non fosse per le esperienze di Pellini e Pedrina, i risultati dell'Olivari troverebbero facile spiegazione ammettendo la « formazione del composto  $\text{Se}_2\text{I}_2$  ».

Dunque si vede che in sostanza il prof. Paternò ammette che le mie esperienze provano qualche cosa, e precisamente quello che ho concluso io.

Chimica. — *Sul peso molecolare del selenio* (<sup>2</sup>). Nota di F. OLIVARI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

La mia Nota preliminare sul peso molecolare del selenio, presentata a questa Accademia (<sup>3</sup>), ha formato l'oggetto di alcune osservazioni da parte del prof. Paternò, in una sua recente Memoria (<sup>4</sup>).

Le frasi a cui alludo sono le seguenti:

« Le mie osservazioni non avevano altro scopo se non quello di far « vedere che dalla crioscopia non deve pretendersi più di quanto essa possa « dare; e che un indirizzo diverso non sia scevro di pericoli è confermato da « due Comunicazioni fatte alla nostra Accademia nel luglio e nell'ottobre « ultimi.

« Nella prima, Pellini e Pedrina, determinando le curve di fusione e « di solidificazione delle miscele di selenio e di iodio, hanno concluso che « *il selenio e l'iodio non formano nessun composto fra loro*, mentre che « dal diagramma da essi ottenuto risulta soltanto provato che il composto si « decompone anche prima di raggiungere la temperatura dell'eutectico.

« Nella seconda, l'Olivari da talune determinazioni crioscopiche del « selenio in soluzione nell'iodio, conclude: *Non vi ha dunque alcun dubbio « che il peso molecolare del selenio sciolto in iodio corrisponda alla mo- « lecola  $\text{Se}_2 = 158,4$ .*

« Ora, non soltanto il dubbio sussiste, ma può anche affermarsi che la « conclusione dell'Olivari sia molto affrettata. Risulta infatti dalle ricerche « di Beckmann che il selenio in soluzione nel fosforo e nell'ioduro di me- « tilene ha la molecola assai prossima ad  $\text{Se}_3$ .

(<sup>1</sup>) Questi Rend., [5], 17, II, 389, (1908).

(<sup>2</sup>) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale della R. Università di Parma, diretto dal prof. G. Plancher.

(<sup>3</sup>) Rend. Accad. Lincei, XVII, pag. 389.

(<sup>4</sup>) Rend. Accad. Lincei, XVII, pag. 632.

« Ora, quando è noto che lo zolfo nei varî solventi ha, tranne che in « soluzioni diluitissime, la molecola egualmente complessa  $S_8$ , e che perchè « essa si dissocia in molecole  $S_2$  è necessario portare il vapore ad altissima « temperatura, non è presumibile che ciò faccia il selenio alla temperatura « di  $113^\circ$ , tanto inferiore a quella del suo punto di fusione.

« Una simile ipotesi; per essere creduta, deve essere altrimenti provata.

« Se non fosse per le esperienze di Pellini e Pedrina, i risultati dell'Olivari troverebbero facile spiegazione ammettendo la formazione del composto  $Se_2I_2$  ».

Dal senso di queste parole non risulta che il prof. Paternò abbia voluto mettere in dubbio che, alle temperature segnate dalla curva di fusione e di solidificazione nel sistema iodio-selenio, non si formano composti.

Ora, tutte le mie misure sono state fatte in questo campo e precisamente in quel tratto di curva in cui, secondo le esperienze di Pellini e Pedrina <sup>(1)</sup> e la mia personale conferma, non s'incontrano difficoltà di osservazione per i punti di congelamento. Era quindi legittimo assumere dette ricerche come punto di partenza delle mie.

E neppure risulta che il prof. Paternò abbia voluto dubitare delle mie osservazioni sperimentali, vale a dire dell'abbassamento crioscopico corrispondente ad  $Se_2$ , perchè, fra l'altro, egli avrebbe potuto facilmente controllarle.

Mi resta solo da ritenere ch'egli abbia creduto non presumibile che il selenio potesse presentare il peso molecolare  $Se_2$  in iodio, unicamente per argomenti *a priori*.

Se mi sono indotto a comunicare a questa Accademia sotto forma preliminare il risultato di queste mie esperienze, si è perchè esso mi riuscì inatteso in quanto che, come ho detto anch'io nella mia Nota, conoscevo i risultati delle esperienze di Beckmann relativi al selenio <sup>(2)</sup>, nonchè le determinazioni del suo peso molecolare dalle densità gassose. Questo comportamento del selenio mi parve degno di nota, ma non mi sembrò da oppugnarsi *a priori* nemmeno per le ragioni addotte dal prof. Paternò.

Innanzitutto, non si comprende come, escluse le cause di anomalia, la deduzione del peso molecolare da un abbassamento crioscopico sicuro che è stata sempre una prova di grande valore, non sia più conclusiva. Non bisogna ricavare dall'analogia esistente fra il selenio e lo zolfo un preconcepito insormontabile da opporre anche ai risultati sperimentali; l'analogia è una guida, non una legge.

Inoltre io mi sono sempre riferito nelle mie conclusioni al peso molecolare del selenio in soluzione di iodio: infatti, la complessità molecolare non è una costante, ma è relativa alle condizioni ed alla natura del mezzo in

<sup>(1)</sup> Rend. Acc. Lincei, XVII, 2° sem., pag. 78.

<sup>(2)</sup> Z. f. physik. Chem., 22, p. 614; 46, p. 853.



cui si sperimenta. E se, come ad una regolarità accidentale, io ho accennato al fatto che già in soluzione la complessità molecolare del selenio sarebbe tanto minore quanto a più alta temperatura si fanno le determinazioni, avevo però ben presente quanta e non sempre ben chiarita influenza abbia la natura del solvente sulla complessità molecolare in soluzione <sup>(1)</sup> e mi riservavo di rivedere in seguito in modo completo l'esattezza delle mie osservazioni.

Infine, non comprendo come il prof. Paternò ritenga non presumibile che una sostanza possa avere in soluzione una complessità molecolare anche più piccola di quella che ha il suo vapore alle più alte temperature. Basti citare l'esempio degli acidi grassi, la cui molecola è semplice nei mezzi non anomalizzati <sup>(2)</sup>: ora, per sdoppiare completamente le loro molecole gassose, bisogna portare la temperatura del vapore molto al disopra del punto di ebollizione <sup>(3)</sup>.

È altresì noto che il tallio, la cui densità di vapore conduce al peso molecolare  $Tl_2 = 408,2$  <sup>(4)</sup> è indubbiamente monoatomico in soluzione nello zinco, nel cadmio e nello stagno <sup>(5)</sup> coi quali non si combina <sup>(6)</sup>.

E il bismuto che nelle amalgame ha il peso molecolare  $Bi_1 = 208,5$  <sup>(7)</sup>, alle più alte temperature ha ancora una densità molto prossima a  $Bi_2$  <sup>(8)</sup>.

Un esempio anche più istruttivo è dato dal cloruro rameoso. Per le esperienze ebullioscopiche di Werner <sup>(9)</sup> in piridina, solfuro di metile e di etile, di Beckmann <sup>(10)</sup> in chinolina e per le determinazioni crioscopiche dello stesso autore in cloruro mercurico <sup>(11)</sup>, il cloruro rameoso avrebbe in questi solventi una grandezza molecolare intermedia alle formule  $CuCl$  e  $Cu_2Cl_2$ ; inoltre l'ebullioscopia in  $BiCl_3$  (PE 447°), secondo Rügheimer e Rudolfi <sup>(12)</sup> e le misure elettrochimiche di Bodlaender e Storbeck <sup>(13)</sup> in soluzione acquosa, conducono senz'altro alla formula  $CuCl$ . Ora, « die Bestimmung des speci-

<sup>(1)</sup> A questo riguardo si può consultare la mia prima Memoria sui poliioduri. Rend. Acc. Lincei, vol. XVII, serie 5<sup>a</sup>, pag. 584.

<sup>(2)</sup> Cfr. Auwers, Z. f. physik. Chem., 42, pag. 213.

<sup>(3)</sup> Cahours, an. 1845, t. LVI, pag. 176.

<sup>(4)</sup> Biltz e V. Meyer, Ber., 22, pag. 725.

<sup>(5)</sup> Heycock e Neville, Proc. Chem. Soc., 1896-97, n. 176, pag. 60; CC. 1889, I, pag. 666; CC. 1891, I, pag. 129.

<sup>(6)</sup> Vegesak, Z. f. anorg. Chem., 52, pag. 30; Kurnakow e Puschin, CC. 1902, I, pag. 172.

<sup>(7)</sup> Ramsay, Z. f. physik. Chem., 3, pag. 359; Tammann, Z. f. physik. Chem., 3, pag. 441.

<sup>(8)</sup> Biltz e V. Meyer, loc. cit.

<sup>(9)</sup> Z. f. anorg. Chem., 15, pag. 1.

<sup>(10)</sup> Z. f. anorg. Chem., 51, pag. 236.

<sup>(11)</sup> Z. f. anorg. Chem., 55, pag. 175.

<sup>(12)</sup> Lieb. Ann., B. 339, pag. 311.

<sup>(13)</sup> Z. f. anorg. Chem., 31, pp. 1 e 458.

« fischen Gewichtes des Dampfes bei 1560° führt nach Untersuchungen von  
« V. Meyer und C. Meyer <sup>(1)</sup> zu einem der Formel  $\text{Cu}_2\text{Cl}_2$  (theoretische  
« Dichte 6,83) entsprechenden Werthe (gefunden 6,93) und die Erhöhung  
« der Temperatur auf 1692° bewirkt nach H. Biltz und V. Meyer <sup>(2)</sup> nur  
« eine geringe Abnahme (gefunden 6,60 und 6,44). Dagegen führen unsere  
« Molekulargewichtsbestimmungen in siedender Wismuthelordlösungen exat  
« zur Formel  $\text{CuCl}$ , also bei einer Temperatur von 447° » <sup>(3)</sup>.

Dunque, il fenomeno da me osservato non è unico: e non mi risulta che sia stato mai revocato in dubbio il risultato delle misure crioscopiche od ebullioscopiche quantunque ragioni di analogia e di comportamento diverso allo stato di vapore si prestassero a critiche della natura di quelle esposte dal prof. Paternò. Io non credo, quindi, di aver preteso dalla crioscopia più di quanto essa possa dare.

**Chimica** — *Su un sale doppio di nitrato ed ossalato di torio*. Nota di O. ANGELUCCI, presentata dal Corrispondente L. BALBIANO.

**Chimica fisiologica**. — *Soluzione di argento colloidale ottenuta per azione dell'acqua distillata pura sull'argento metallico*. Nota di MARGHERITA TRAUBE-MENGARINI ed ALBERTO SCALA, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

**Chimica fisiologica**. — *Ricerca del fosforo colla lastra fotografica* <sup>(4)</sup>. Nota del prof. LUIGI SABBATANI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

L'anno scorso, desiderando fare uno studio dell'assorbimento, ripartizione e fissazione, della scomparsa ed eliminazione del fosforo nell'avvelenamento acuto, mi persuasi presto che i metodi analitici ordinariamente usati (Mitscherlich, Dusart e Blondlot, Scherer) non potevano servire affatto al mio scopo: perchè quantunque siano sensibilissimi, non lo sono ancora abbastanza, per le quantità piccolissime di fosforo che avrei dovuto cercare; perchè esigono la

<sup>(1)</sup> Ber., 12, pag. 1283.

<sup>(2)</sup> Loc. cit.

<sup>(3)</sup> Rügheimer e Rudolf, loc. cit., pag. 345.

<sup>(4)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di farmacologia della R. Università di Parma.

distruzione del tessuto. ed io avrei voluto scoprire il fosforo nel sangue fresco e negli organi tuttora vivi; perchè richiedono molto materiale, ed io avrei avuto bisogno che mi potesse bastare anche una sola goccia di sangue; perchè sono sempre di applicazione piuttosto lunga e delicata, ed io avrei desiderato di potere ripetere i saggi uno dietro l'altro molto rapidamente.

Fu così che pensai di usufruire l'azione riducente del fosforo, come nel saggio Scherer, ma sulla lastra fotografica alla gelatina bromuro d'argento, anzichè sulla listerella di carta al nitrato d'argento.

Ottenni subito dei risultati eccellenti, proprio come desideravo, e mentre io mi accingeva allo studio della reazione del fosforo e di altri agenti riduttori sulla lastra fotografica, e cercava di stabilire il valore che questa reazione può avere nelle ricerche farmacologiche sul fosforo, feci eseguire da Gardella <sup>(1)</sup> una prima serie di esperienze sulla possibile applicazione di questo metodo alla ricerca tossicologica; il prof. Gardenghi l'ha adoperato per alcune ricerche igieniche industriali <sup>(2)</sup>; Gardella comunicò al Congresso di Firenze della Soc. ital. per il progresso delle scienze (1908) alcune prime osservazioni farmacologiche fatte con questo metodo; io stesso ho comunicato alla Società Medica di Parma <sup>(3)</sup> delle esperienze sull'assorbimento e fissazione del fosforo, fatte colla lastra fotografica, ed ho poi affidato allo studente Tomasinelli lo studio farmacologico completo della circolazione del fosforo negli animali avvelenati.

Il fosforo giallo può agire sulla lastra in vari modi <sup>(4)</sup>.

Per una riduzione diretta del sale argentario, analoga a quella che si ha nel saggio Scherer, con formazione di  $\text{Ag}_3\text{P}$  ed  $\text{Ag}$ ; la lastra resta direttamente macchiata, la macchia è bruno-rossastra, rugginosa, di aspetto metallico; si vede subito, senza bisogno di usare liquidi rivelatori, e persiste al trattamento coll'iposolito. Queste impronte sono state osservate da Liesegang <sup>(5)</sup>, si ottengono solo con quantità grandi di fosforo, poste molto vicino alla lastra; io le ho ottenute bene operando sott'acqua.

La fosforescenza agisce sulla lastra in modo del tutto simile alla luce ordinaria e l'impressione si sviluppa solo durante l'uso dei liquidi rivelatori. Queste impressioni si ottengono solo quando esiste fosforescenza, e si manifestano anche esponendo la lastra capovolta, in modo che la gelatina non

<sup>(1)</sup> Gardella E., *Riconoscimento del fosforo mediante la lastra fotografica*. Archivio di Psich., Med. leg. ed Antropol. crim., 29 (1908).

<sup>(2)</sup> Mi ha verbalmente comunicato il risultato delle sue ricerche, che pubblicherà presto.

<sup>(3)</sup> Sabbatani L., *Riconoscimento del fosforo con lastra fotografica, ed applicazioni*. Bollettino della Società Medica di Parma 1 [2] (1908), 174-176.

<sup>(4)</sup> Il fosforo rosso, anche in forte quantità, si è sempre mostrato inattivo sulla lastra fotografica.

<sup>(5)</sup> Liesegang R. E., *Phosphographie* (*Photographische Mitteilungen*, 37) [*Zeitsch. f. phys. Chem.* 45 (1903) 379].



possa venire toccata dai vapori di fosforo. Di questo genere di impressioni soltanto pare voglia giovare ora Valeri <sup>(1)</sup>, applicando la lastra fotografica all'apparecchio Mitscherlich.

Un terzo genere di impressione, che non mi consta sia stato studiato da altri, si ottiene quando sulla gelatina al bromuro d'argento arriva il fosforo in quantità così piccola che non può dare nessuna traccia di imbrunimento diretto, e nessuna impressione da fosforescenza. Queste impressioni si ottengono per modificazioni, che minime tracce di fosforo producono sul bromuro d'argento, simili a quelle prodotte dalla luce; si rendono visibili solo durante lo sviluppo e restano fissate dall'iposolfito; si ottengono solo quando la gelatina può venire a contatto diretto dei vapori di fosforo o di soluzione acquosa di esso. Queste impressioni sono le più importanti di tutte, sono le sole che veramente interessano nella ricerca delle quantità minime di fosforo e su di esse basa il metodo di ricerca del fosforo che adopero nelle esperienze farmacologiche sopra dette. L'applicazione di questo metodo incomincia proprio quando un'azione riducente diretta del saggio Scherer, o la fosforescenza col l'apparecchio Mitscherlich, o la colorazione verde della fiamma d'idrogeno col metodo Dusart e Blondlot riuscirebbero del tutto negative.

La sensibilità della reazione che si ottiene col fosforo sulla lastra fotografica è così enormemente grande, che per un momento dubitai seriamente fosse data non direttamente dal fosforo, ma da azioni radioattive sue, analogamente a quello che Graetz <sup>(2)</sup> aveva ammesso per spiegare la grande sensibilità della lastra fotografica all'acqua ossigenata, ma che poi fu dimostrato non ammissibile da Precht ed Ostuki <sup>(3)</sup> e da Padoa <sup>(4)</sup>.

Dubitai che la grande sensibilità della reazione potesse dipendere da particolari emanazioni del fosforo, così strenuamente sostenute da Bloch <sup>(5)</sup> e negate da Schmidt <sup>(6)</sup>. Dubitai in fine che, ossidandosi facilmente il fosforo

<sup>(1)</sup> Valeri, *Azione della fosforescenza sui preparati al bromuro di potassio in rapporto alla tossicologia del fosforo*. Accademia Medica di Padova; seduta del 26 febbraio 1909 [*Patologica* 1 (1909) 219].

<sup>(2)</sup> Graetz L., *Die strahlungsartigen Erscheinungen des Wasserstoffsuperoxyds*. Physikalische Zeitschr. 5 (1904), 730-731; *Strahlung des Wasserstoffsuperoxyds*. Verh. d. D. Phys. Ges. 3 (1905), 78-86.

<sup>(3)</sup> Precht I. u. Ostuki C., *Strahlung des Wasserstoffsuperoxyds*. Ber. Dtsch. phys. Ges. 3 (1905) 53-56; Verh. der Dtsch. phys. Ges. 3 (1905), 163-169.

<sup>(4)</sup> Padoa M., *Osservazioni sulla pretesa radioattività dell'acqua ossigenata*. Atti R. Acc. Lincei, Sc. fis., mat. e nat., 14, II (1905), 43-44.

<sup>(5)</sup> Bloch E., *Sur l'émanation du phosphore*. C. r. de l'Acad. des Sc., 135 (1902), 1324-1326; *Sur l'ionisation par le phosphore*. C. r. de l'Acad. des Sc., 137 (1903), 1040-1042.

<sup>(6)</sup> Schmidt G. C., *Ueber die Emanation des Phosphors*. Ann. der Physik, 10 [4] (1903), 704-729; Ber. Dtsch. Physik. Ges., 4 (1907), 640-679; Physikal. Zeitschr. 5, 445-447.

durante il processo di ossidazione, si producessero delle piccole quantità di acqua ossigenata o di ozono, e che queste fossero realmente la causa della grandissima sensibilità della reazione.

Parmi però che dall'assieme delle esperienze fatte restino interamente esclusi tutti questi dubbî, e resti dimostrato che le reazioni sulla lastra sono prodotte direttamente dal fosforo.

Stando sempre nella camera fotografica ed operando a temperatura ambiente, adopero la lastra fotografica in due modi: o portandola direttamente a contatto della materia da esaminare, od esponendola ai vapori di fosforo che si svolgono da essa.

Nel primo modo si fa cadere sulla gelatina una goccia del liquido (soluzioni acquose, sangue) od un pezzetto del tessuto (fegato, cervello, muscolo) che si vuole esaminare, vi si lascia per 10 minuti, quindi si lava la lastra con un getto d'acqua un po' forte e si tratta coi reattivi ordinari di sviluppo e fissaggio usati in fotografia <sup>(1)</sup>; se il liquido od il tessuto conteneva fosforo, nel punto toccato la lastra diventa bruna o nera, a seconda della quantità di fosforo presente. Si ottengono così delle reazioni molto bene visibili anche con una sola goccia della comune acqua di fosforo, diluita al centesimo; acqua di fosforo che, quando è satura, per consenso quasi unanime dei chimici ne contiene solo tracce non dosabili. Ma per avere un'idea della squisita sensibilità della reazione, si rifletta che la quantità di fosforo che si può supporre si trovi in una goccia d'acqua diluita al centesimo sarebbe, in base a determinazioni di solubilità del fosforo nell'acqua, di *pochi centesimi di millesimi di milligramma*.

La solubilità del fosforo in acqua è secondo Stich <sup>(2)</sup> gr. 0,0003 %, secondo Bokorny <sup>(3)</sup> gr. 0,0200 %, e secondo determinazioni nostre sarebbe compresa fra 0,0150 e 0,0079 % <sup>(4)</sup>: per cui, supponendo sia di gr. 0,0100 %. avremmo che in una goccia d'acqua diluita al centesimo, sarebbero contenuti appena gr. 0,00000005 = gr.  $5 \times 10^{-8}$  di fosforo. Questa cifra non ci deve rappresentare un valore assoluto, ma più che tutto l'ordine di grandezza cui arriva la sensibilità squisita della reazione.

<sup>(1)</sup> Per lo sviluppo adoperavo una miscela a parti uguali di soluzioni A e B:

A) Carbonato di sodio . . . gr. 14	B) Idrochinone . . . . . gr. 2
Bromuro di potassio . . . " 2	Metolo . . . . . " 3
Acqua . . . . . cm. <sup>3</sup> 600	Solfito di sodio . . . . . " 28
	Acqua . . . . . cm. <sup>3</sup> 600

Per la fissazione adoperavo la soluzione d'iposolfito di sodio al 20 per cento.

<sup>(2)</sup> Stich C., *Zur Löslichkeit des Phosphors*. Pharm. Zeitung 48, 343-344.

<sup>(3)</sup> Bokorny Th., *Ueber die Wasserlöslichkeit wässriger Phosphorlösungen*. Chem. Ztg. (1896), 1022.

<sup>(4)</sup> La solubilità cresce moltissimo colla temperatura da 0° a 38°.

Nel secondo modo si espone la lastra ai vapori di fosforo. Servono a questo scopo molto bene dei piccoli bicchieri cilindrici, ad orli molati e piani, entro cui si pongono cm.<sup>3</sup> 10 di liquido, o gr. 10 di sostanza da esaminare, finamente tagliuzzata o spappolata, se si tratta di tessuti (fegato, muscolo, cervello, ecc.). Si copre il bicchiere colla lastra, tenendo la gelatina rivolta in basso, e dopo un'ora si tratta la lastra coi liquidi soliti di sviluppo e fissaggio.

Se vi è fosforo, i suoi vapori impressionano la lastra, si forma un disco bruno o nero, che riproduce la forma della sezione interna del bicchiere, e qui si avverta che la forma stessa precisa della immagine esclude in modo sicuro che si tratti di impressione ottenuta per opera della fosforescenza.

In questo modo si riesce ad avere reazione sensibile ancora con cm.<sup>3</sup> 10 di acqua di fosforo diluita ad  $\frac{1}{1200}$ , cioè con una quantità di fosforo che, supponendo ancora la solubilità in acqua di gr. 0,0100 %, si valuta a gr. 0,0000008 =  $8 \times 10^{-7}$ , *otto decimi di millesimo di milligramma*.

Per esposizione ai vapori la reazione è quindi meno sensibile che per contatto diretto; ma più netta, più sicura, e, in molti casi, preferibile.

Come esempio riproduco nella fig. 1 alcune negative ottenute per contatto diretto con una goccia di acqua di fosforo diluita al  $\frac{1}{10}$  ed al  $\frac{1}{100}$  e per dieci minuti di contatto, ed altre ottenute per esposizione ai vapori con cm.<sup>3</sup> 10 di acqua di fosforo sempre più diluita e per un'ora di esposizione.

A) *Contatto diretto.*

Numero della lastra . . . . .	1	2
Acqua di fosforo diluita al . . .	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$

B) *Esposizione ai vapori.*

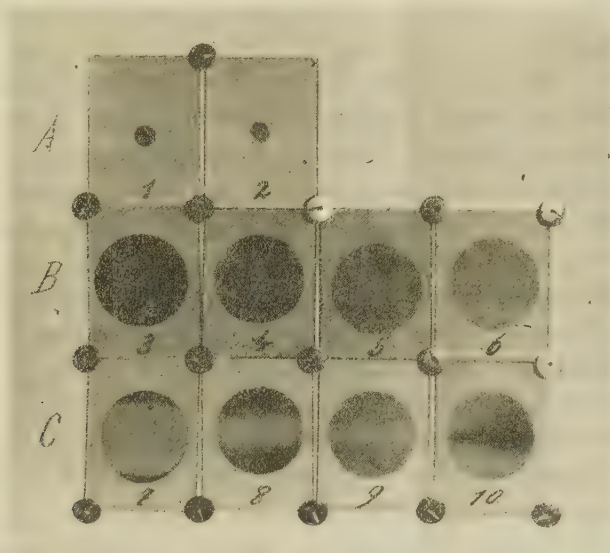
Numero della lastra . . . . .	3	4	5	6
Acqua di fosforo diluita al . . .	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{600}$	$\frac{1}{1200}$

Si può ancora facilmente svelare la presenza di minime quantità di fosforo nell'aria espirata di un animale avvelenato o nell'aria di un ambiente, facendo arrivare un getto dell'aria stessa per 10-15 minuti sopra una parte limitata della lastra, che si tiene chiusa e bene protetta dalla luce entro una cassetta adatta.

L'impressione della lastra è data sicuramente dal vapore di fosforo che arriva a contatto della gelatina; è favorita grandemente dalla presenza contemporanea di vapore d'acqua, da una temperatura un po' alta della materia fosforata ed un po' bassa della lastra. In queste condizioni di temperatura si ottiene una deposizione più abbondante di vapore; quando invece la temperatura della lastra è più alta di quella della materia da esaminare, la impressione è dobolissima e può anche mancare del tutto.



A questo proposito, nella figura annessa riporto una serie di negative ottenute in esperienze nelle quali saggiavo colla lastra cm.<sup>3</sup> 10 di acqua di fosforo diluita al decimo, per mezz'ora, e facevo in modo che, restando fissa la temperatura ambiente alla quale operavo, contemporaneamente in un tubetto di vetro posto trasversalmente sulla lastra circolasse dell'acqua, ora fredda ed ora calda, in modo che una zona centrale della lastra venisse riscaldata o raffreddata, rispetto al resto della lastra stessa.



C) *Influenza della temperatura* (vedi figura).

N. della lastra	Temperatura della zona centrale della lastra	Temperatura ambiente e di quasi tutta la lastra	Differenza di temperatura
7	31°,0	19°,5	+ 11°,5
8	19°,0	16°,0	+ 3°,0
9	17°,0	15°,0	+ 1°,5
10	15°,0	15°,5	— 0°,5

Si vede così che la lastra resta impressionata sempre e prevalentemente nella parte più fredda, dove la precipitazione di vapore d'acqua e di fosforo è maggiore. Ciò parmi escluda che queste impressioni della lastra dipendano da emanazioni del fosforo; e dimostra che la condizione migliore per ottenere una reazione molto sensibile è di scaldare leggermente il bicchiere che contiene la materia da esaminare e raffreddare contemporaneamente la lastra, sovrapponendovi un altro bicchiere pieno d'acqua fredda.

Fra le sostanze che reagiscono sulla lastra fotografica in modo simile al fosforo, dobbiamo ricordarne due, che presentano un particolare interesse nelle ricerche chimico-biologiche. L'una è l'acido solfidrico, e l'altra, l'acqua ossigenata.

Quanto all'acido solfidrico, partendo da soluzioni acquose esattamente titolate, ho potuto vedere che per contatto diretto con la lastra in 10 minuti si riesce ad avere una reazione ancora sensibile con una goccia di soluzione, contenente gr.  $0,8 \times 10^{-8}$  di acido solfidrico: e per esposizione ai vapori in un'ora si ha una reazione sensibile ancora con cm.<sup>3</sup> 10 di soluzione contenente gr.  $17 \times 10^{-7}$ .

Si avverta però che certamente la reazione è di gran lunga più sensibile di quello che appare da queste cifre, quando si rifletta alla grande ossidabilità del solfidrico, ed alla grandissima diluizione a cui si era giunti, per cui una parte non piccola di solfidrico era andata certamente perduta.

Se in un liquido in cui si vuole cercare il fosforo fosse contenuto anche del solfidrico, basterebbe aggiungere alcune gocce di soluzione di acetato di piombo, perchè questo fisserebbe il solfidrico, lascierebbe libero il fosforo, e la lastra esposta ai vapori ne accuserebbe la presenza così bene, come se si trattasse d'una soluzione pura di fosforo.

Quanto all'acqua ossigenata è noto già da parecchi anni che essa impressiona la lastra fotografica. Russel<sup>(1)</sup> vide che in questo modo si può riconoscere la presenza di perossido d'idrogeno anche in soluzione ad un milionesimo, ed ora da esperienze che ho fatte con acqua ossigenata al 30% di Merck, trovo che per contatto diretto in 10 minuti si possono svelare ancora gr. 0.000000015 di  $H_2O_2$  contenuti in una sola goccia d'acqua, e per esposizione ai vapori a temperatura ambiente in un'ora si svelano ancora gr. 0.003 di  $H_2O_2$  contenuti in 10 cm.<sup>3</sup> d'acqua.

È noto che molte sostanze organiche, molti metalli, ecc., possono impressionare la lastra fotografica, e si crede che ciò avvenga perchè, ossidandosi queste sostanze, producono sempre delle tracce di perossido d'idrogeno, che andrebbe ad impressionare la lastra. Ora si potrebbe dubitare che anche il fosforo agisca sulla lastra non direttamente, ma indirettamente per formazione di perossido.

Si avverta però che per esposizione ai vapori la sensibilità della lastra appare molto minore al perossido che non al fosforo, e si avverta inoltre che le impressioni ottenute con sostanze ossidabili si producono sempre lentissimamente, nel giro di molte ore, mentre col fosforo l'impressione avviene rapidamente.

(<sup>1</sup>) Proc. Roy. Inst. 16 (1900), 140-146; Zeitsch. f. phys. Chem. 37, 118-119.

*Limiti di sensibilità delle reazioni sulla lastra fotografica  
a temperatura ambiente (¹).*

	Soluzioni acquose	
	Per contatto diretto 1 goccia per 10 minuti	Per esposizione ai vapori cmc. 10 per 1 ora
Fosforo . . . . .	$5,0 \times 10^{-8}$	$8 \times 10^{-7}$
Acido solfidrico . . . .	$0,8 \times 10^{-8}$	$17 \times 10^{-7}$
Perossido d'idrogeno . .	$1,5 \times 10^{-8}$	0,003

Per il riconoscimento del fosforo la lastra serve molto bene quando si tratta di cercarlo negli organi, nel sangue o nell'aria espirata. Per contatto diretto una goccia di sangue in dieci minuti dà un risultato sicuro, per esposizione ai vapori gr. 10 di sangue o di tessuto finamente tagliuzzato ed un'ora di esposizione sono sufficienti.

Il sangue ed i tessuti di animali sani, ed il sangue di uomo sano e malato di varî processi morbosi, non ha mai dato traccia di reazione, che possa mascherare quella del fosforo. Il sangue ed i tessuti di animali avvelenati col fosforo hanno dato sempre più o meno presto una reazione sicura.

La così detta « foto-reazione del sangue » descritta da Schläpfer (²), si produrrebbe debole e lentissima, dopo molte ore di esposizione; in un'ora dal sangue fresco non si ha mai nulla. Anzi è degno di nota che, operando per contatto diretto con sangue e tessuti, se questi non contengono fosforo, la lastra nel punto toccato resta leggermente insensibilizzata, talchè prolungando un po' il trattamento coi liquidi rivelatori, mentre tutta la lastra imbrunisce alquanto, resta invece più chiara nel punto toccato; proprio il rovescio di quello che avviene quando i tessuti stessi contengono fosforo.

**Mineralogia.** — *Baritina di Brosso e Traversella.* Nota del dott. LUIGI COLOMBA, presentata dal Socio G. SPEZIA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(¹) Come già dicemmo sopra, a queste cifre non si deve e non si può dare una grande importanza, come valori assoluti; valgono solo a mostrare l'ordine di grandezza cui arriva la sensibilità di queste reazioni.

(²) Schläpfer V. *Photoaktive Eigenschaften des kaninchenblutes*. Pflüger' Arch. 108 (1905), 537-562.



**Cristallografia.** — *Studio cristallografico dell'acido ortotimotico e di due timotidi isomeri.* Nota di A. ROSATI, presentata dal Socio G. STRÜVER.

**Patologia vegetale.** — *Un'esperienza sopra il valore del chemotropismo nell'azione parassitaria dei funghi.* Nota di L. PETRI, presentata dal Socio G. CUBONI.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

### RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio STRÜVER, relatore, a nome anche del Corrispondente VIOLA, legge una Relazione colla quale si propone la pubblicazione nei volumi accademici, della Memoria del dott. G. PONTE, avente per titolo: *Il diabase di Paraspora ed i fenomeni di deformazione nei suoi feldspati.*

Il Socio GRASSI, relatore, a nome anche del Socio TODARO, legge una Relazione sulla Memoria del dott. G. BRUNELLI, intitolata: *La spermatogenesi del Grillus desertus* Pall. (*Divisioni spermatogoniali e maturative*), concludendo col proporre l'inserzione nei volumi accademici.

Entrambe le precedenti Relazioni, messe partitamente ai voti dal PRESIDENTE, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

### PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dal Corrisp. VIOLA, dal Socio straniero HAECKEL e dai professori DE ANGELIS D'OSSAT e SACCO. Menziona inoltre una pubblicazione apparsa in occasione del centenario della Società geologica di Londra; un'altra fatta dagli ammiratori e dagli allievi del prof. ZEUTHEN, Socio straniero dell'Accademia, in occasione del suo 70° genetliaco; e due opere contenenti, l'una un *Catalogo della fauna Brasiliana* edito a cura di I. H. e R. von IHERING, e relativa l'altra alle risorse minerarie dell'India, compilata dall'HOLLAND.

Il Socio CERRUTI fa omaggio, a nome dell'autore prof. CALDARERA, dell'opera: *Primi fondamenti della geometria nello spazio* e ne parla.

Il Socio MARCHIAFAVA offre la sua pubblicazione: *Sopra l'arteriosclerosi* e ne dà notizia.

## CORRISPONDENZA

Il Segretario MILLOSEVICH dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La Società Reale di Vittoria; la Società geologica di Sydney; l'Accademia delle Scienze e il Museo di Storia naturale di Nuova York; il Museo Coloniale di Wellington; la Biblioteca Bodleiana di Oxford; gli Osservatori di Cambridge Mass., e di Praga.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 2 maggio 1909.*

- AGAMENNONE G. — Brevi cenni sull'organizzazione del servizio sismico in Italia. s. l. ed a. 4°.
- ALVAREZ J. — Orígenes de la Música Argentina. s. l. 1908. 8°.
- BERLESE A. — Gl'Insetti: loro organizzazione, sviluppo, abitudini e rapporti coll'uomo. Vol. I. Milano, 1906-09. 4°.
- CALDARERA F. — Primi fondamenti della Geometria dello Spazio. Seguito alla prima parte col titolo: Primi fondamenti della Geometria del Piano. (Estr. dal vol. XLVI del Giornale di Matem. di Battaglini). Palermo, 1908.
- CHANTRE E. — Le docteur E. Kamy: sa vie et ses travaux (1842-1908). (Société d'Anthropologie de Lyon. Séance du 6 février 1809). Lyon, 1909. 8°.
- DALGADO D. G. — Notes on the climate of Mont' Estoril and the Riviera of Portugal, or the climate of Mont'Estoril determined by the Flora and by Oceanic and Atmospheric Currents. Lisboa, 1908. 8°.
- DE) ANGELIS D'OSSAT G. — I terreni acquitrinosi della Campagna Romana. Altipiano. (Estr. dal Boll. della Soc. degli Agric. Ital., n. 11 del 15 giugno 1907). Roma, 1907. 8°.
- DE) ANGELIS D'OSSAT G. — Il Miocene nella Valle del Trigno (Estr. dal Bull. della Soc. geol. ital., v. XXVIII 1908). Roma, 1908. 8°.
- DE) ANGELIS D'OSSAT G. — Scisto bituminoso ad Ittiolo nell'Appennino Centrale. (Estr. dalla Rass. Miner. e dalla Industria chimica, v. XXIX, 1909). Torino, 1909. 8°.
- DE) ANGELIS D'OSSAT G. — Lavatore De Angelis d'Ossat. Lavatore per arricchire le rocce con cinabro granulare o con qualunque altro minerale pesante, come oro, ecc. (Estr. dalla Rass. Miner. e dall'Ind. chim., v. XXVIII). Torino, 1908. 8°.
- DE) ANGELIS D'OSSAT G. — Sulla geologia della provincia di Roma. Comunicazione. (Estr. dal Boll. della Soc. geol. ital., vol. XXVII). Roma, 1908. 8°.
- DE) ANGELIS D'OSSAT G. — Altri zoantari del terziario della Patagonia. (Anales del Museo Nac. de Buenos Aires, t. XVI, ser. 3ª). Buenos Aires, 1907. 8°.
- DE) ANGELIS D'OSSAT G. — Il sottosuolo della Campagna Romana e le alberature. (Estr. dal Boll. della Soc. degli agric. ital., n. 16, 31 agosto 1907). Roma, 1907. 8°.
- DE) ANGELIS D'OSSAT G. — Vincenzo Spirek (28 agosto 1852-3 ottobre 1907). (Estr. dal Boll. della Soc. geol. ital., v. XXVII). Roma, 1909. 8°.
- DE) BLASIO A. — Arnesini litici del Molisano. (Estr. dal fasc. di marzo 1909 della Rivista d'Italia). Roma, 1909. 8°.
- FESTSKRIFT til. H. — G. Zeuthen fra Venners og Elever i Anledning af Hans 70 Aars Fødselsdag 15. Februar 1909. København, 1909. 8°.
- HAECKEL E. — Das Wettbild von Darwin und Lamarck. Festrede zur Hundertjährigen Geburtstag-Feier von Charles Darwin am 12. Februar 1909 gehalten im Volkshause zu Jena. Leipzig, 1909. 8°.
- HALE G. E. — Mount Wilson solar Observatory of the Carnegie Institution of Washington. Annual Report. 1908. (Reprint. from Year Book, n. 7). s. l. ed a. 8°.
- HOLLAND T. H. — Sketch of the mineral resources of India. Published by order of the Government of India. Calcutta, 1908. 4°.
- IHERING H. (VON) E IHERING R. (VON). — Catalogos da Fauna Brasileira editados



- pelo Museu Paulista S. Paulo-Brazil. Vol. I, As Aves do Brazil. São Paulo, 1907. 8°.
- JANET C. — Anatomie du Corselet et histolyse des muscles vibrateurs, après le vol nuptial, chez la reine de la Fourmi (*Lasius niger*). Texte et planches. Limoges, 1907. 8°.
- JANET C. — Histogénèse du Tissu adipeux remplaçant les muscles vibrateurs histolysés après le vol nuptial, chez les reines des Fourmis. (Estr. des Compt. rend. hebdom. de Séances de l'Acad. des Sciences. T. 144, 1907). Limoges, 1907. 4°.
- JANET C. — Histolyse des muscles de mise en place des ailes, après le vol nuptial, chez les reines des Fourmis. (Estr. des Compt. rend. des Séances de l'Acad. des Sciences. 9 dec. 1907). Rennes, 1908. 4°.
- JANET C. — Histolyse, sans phagocytose, des muscles vibrateurs du vol, chez les reines des Fourmis. (Estr. Compt. rend. hebdom. des Séances de l'Acad. des Sciences. T. 144). Limoges, 1907. 4°.
- LACROIX A. — Sur quelques minéraux radioactifs du Madagascar. (Estr. du Bull. de la Soc. Franç. de Minéralogie, XXXI). Paris, 1908. 8°.
- LONGO B. — Osservazioni e ricerche sul *Ficus Carica* L. (Annali di Botanica, vol. VII, fasc. 2°). Roma, 1909. 8°.
- LONGO B. — La poliembrionia nello *Xanthoxylum Bungei* Planch. senza fecondazione. (Estr. dal Bull. della Soc. Bot. Ital. Aduanza di Firenze, 14 novembre 1908). s. l. ed a. 8°.
- MACHADO V. — Les applications directes et indirectes de l'Electricité à la Médecine et à la Chirurgie. Lisbonne, 1908. 4°.
- MARCHIAFAVA E. — Sopra l'Arteriosclerosi. (Estr. dagli Atti della V riunione della Soc. Ital. di Patologia. Palermo, 1908). Palermo, 1909. 8°.
- MILOSKOVICH F. — Sopra gli epidoti poco feriferi (clinozoisite-epidoto) di S. Barthélemy in Val d'Aosta. (Estr. dagli Atti della Soc. Ligustica di Scienze naturali e geogr., vol. XIX). Genova, 1908. 8°.
- ODDONE E. — Sui Geysers e sui Pseudo-Geysers. (Estr. dal Bollett. della Soc. Sism. Ital., vol. XIII). Modena, 1909. 8°.
- ODDONE E. — Appunti fisici per lo studio del terremoto di Sicilia e Calabria (addì 28 dic. 1908). (Estr. dagli Annali della Soc. degli Ingegneri e Architetti italiani, n. 7, apr. 1909). Roma, 1909. 4°.
- PLATANIA G. — Sull'eruzione dell'Etna nel 29 aprile 1908. Prima relazione. (Estr. dalle Mem. della Classe di Sc. della R. Accad. degli Zelanti, 3ª serie, vol. V). Acireale, 1908. 8°.
- PLATANIA G. — Il terremoto calabrese dell'8 settembre 1905 a Stromboli. (Estr. dalle Mem. della Classe di Sc. della R. Accad. degli Zelanti, 3ª serie, vol. V). Acireale, 1906. 8°.
- RIBAGA C. — La Prospaltella Berleseii How. parassita della *Diaspis pentagona* Targ. Sua introduzione in Italia per parte della R. Staz. Entomol. di Firenze, e notizie biologiche su questo imenottero. (R. Staz. di Entomologia agraria in Firenze). Firenze, 1909. 8°.
- RUSO A. — Sopra alcuni problemi di zoologia generale e sopra i mezzi più opportuni per risolverli. Discorso inaugurale del VII convegno dell'Unione zoologica italiana, tenutosi a Bormio, sett. 1908. Catania, 1909. 8°.
- SACCO F. — Giovanni Plana. Cenni biografici. Torino, 1908. 8°.
- SACCO F. — Cenni geologici sulle Alpi Marittime. (Estr. dalla Guida delle Alpi Marittime. Sezione di Torino del Club alpino ital.). Torino, 1908. 8°.
- SACCO F. — Edilizia sismologica. Norme generali e bibliografia. Raccolta. Perugia, 1908. 8°.
- SACCO F. — La Terra è viva! (Estr. dal Numero Unico « Pro Sicilia et Calabria »). Torino, 1909. 4°.
- SACCO F. — Le zone luminose della luna. (Estr. dalla Rivista d'Astronomia e scienze affini. Nov. 1908). Torino, 1908. 8°.

- SACCO F. — Il Molise. Schema geologico. (Estr. dal Boll. della Soc. geol. ital., vol. XXVII). Roma, 1909. 8°.
- SACCO F. — Un allarme di geologia applicata alle direttissime Bologna-Firenze e Genova-Milano. (Estr. dal Giorn. di Geol. Prat., anno VI). Perugia, 1908. 8°.
- SACCO F. — Glacialismo ed erosioni nella Majella. (Estr. dagli Atti della Soc. Ital. di Scienze Nat., vol. XLVII). Pavia, 1909. 8°.
- SACCO F. — Il Gruppo della Majella. Studio geologico. (R. Accad. delle Scienze di Torino, anni 1908-1909). Torino, 1909. 4°.
- SEMMOLA E. — Le curve iso-anomale della gravità terrestre e le aree sismiche.

- (Estr. dagli Atti del R. Ist. d'Incoragg. di Napoli. Ser. VI, vol. V). Napoli, 1909. 4°.
- VIOLA C. — Reflexion an der Grenze eines isotropen Mediums gegen einen Krystall und Bestimmung der Hauptbrechungsindices. (Sonderabd. aus "Zeitschrift für Krystallographie usw." XLVI. B., 2. H.). Leipzig, 1909. 8°.
- VIOLA C. — Relazione fra gli indici di faccie e zone nel simboleggiamento a tre e a quattro indici. (Estr. dalla Rivista di Mineralogia e Cristallogr. Ital., vol. XXXVI). Padova, 1909. 8°.
- WATTS W. W. — The centenary of the Geological Society of London, celebrated Sept. 26<sup>th</sup> to Oct. 3<sup>rd</sup>. London, 1909. 8°.

E. M.